

Mixed Logit モデルの汎用性に着目した特性比較分析

兵藤 哲朗¹・章 翔²

¹正会員 工博 東京商船大学助教授 商船学部流通情報工学課程 (〒135-8533 東京都江東区越中島 2-1-6)

²学生会員 工修 東京商船大学大学院博士課程 商船学部流通情報工学専攻 (同上)

パラメータの分散や、誤差項の異質性などを扱うことのできる Mixed Logit モデルは極めて柔軟な構造を持った汎用性が高いモデルと考えられる。しかしながら、その交通計画分野の適用例は限られており、かつ従来手法との比較検討も不十分な段階にある。本研究では、Mixed Logit モデルの特性を、①選択肢間誤差構造、②誤差の個人異質性、③パラメータの確率変動 といった、従来別個のモデルで対応してきた各手法と比較することにより明らかにした。シミュレーションデータに加えて、都市間の実行動データなども適用対象とした分析結果より、実用性を踏まえた Mixed Logit モデルの利用可能性を示すことができた。また、Mixed Logit モデルを主軸とした既存方法論の簡単な整理を行うこともできた。

Key Words: *Mixed Logit model, Nested Logit model, Probit model, Mass-Point model*

1. はじめに

過去 20 年余りにかけ、交通計画の分野では Logit モデルを中心とする行動分析技法の開発・改良が積み重ねられ、実用分野でも交通需要分析の精緻化や合理化に多大な貢献を続けている。1990 年代後半に至り、Logit モデルの誤差構造を一般化した Mixed Logit モデルが提案され、今まで開発されてきた幾つかの方法論を同モデルで近似ないしは置き換えられる可能性が生じた。これは、「全てのランダム効用モデルは Mixed Logit モデルで近似できる」¹⁾と記されている通り、Mixed Logit モデルが極めて柔軟に誤差構造を表現し得る離散選択モデルであることによる。加えて、計算機速度の飛躍的な向上や、Mixed Logit 対応ソフトの普及²⁾³⁾に伴い、その適用場面やモデル特性を把握する必要性がわが国でも高まっていると考えられる。そこで、本研究では Mixed Logit モデルの適用可能性について関連方法論との比較分析を試み、その特性を把握すると共に、実用性からみた同モデルの有効性を考察することを目的とする。具体的には、①選択肢間誤差構造、②誤差の個人異質性、③パラメータの確率変動 といった 3 つの側面から Mixed Logit モデルの特性を分析し、その汎用性についても整理を行う。

2. Mixed Logit モデルの構造と離散選択モデル

(1) 既存研究の整理

Logit モデルを代表とする交通行動モデルの交通計画への適用は、1970 年代初頭に始まり、同時に種々の改良が検討されてきた。主なものとしては、IIA 特性の緩和策としての Nested Logit モデル (1970 年代後半)、非集計と集計データ、或いは SP データと RP データとの組み合わせなど、異種データの統合利用 (1980 年代後半)、シミュレーション法による多項 Probit モデルの推定方法論開発⁴⁾ (1990 年前後) などがあげられよう。Mixed Logit モデルはこれらのうち、計算機能力向上を契機とするシミュレーション法を用いたパラメータ推定手法開発の延長線上に位置づけられよう。

Mixed Logit モデルの呼称は参考文献 5) に端を発するが、誤差構造を扱う離散選択モデル自体は、1970 年代より提案され、類似のモデルは断片的に開発されてきている。例えば、Probit モデルの確率変動係数モデル⁶⁾はその一例であるし、Logit モデルのパラメータの確率変動を扱った 1970 年代後半に提案された Random Coefficients Logit⁷⁾も Mixed Logit の一種である。しかし従来のモデルにおいてはパラメータ推定が困難なケースが多く、一般に実用上用いられることは少なかった。前述の通り、1990 年代に入り、多項 Probit モデルをシミュレーション法で構築する技術が確立され、その実用化が浸透するに従い、パラメータ推定の困難性が大幅に克服された。これが

Mixed Logit モデルの名を冠した、誤差構造を一般化したモデルが開発された背景とみなせよう。

また、その一方でシミュレーション法に依らずに IIA 特性が緩和可能なモデルも近年多く開発されている。例として、選択肢間の誤差は無相関で、選択肢毎の分散の相違を仮定した HEV (Hetero-scedastic Extreme Value) モデル⁸⁾や、選択肢集合間の任意の2選択肢間の相関を扱う PCL (Pair Combinatorial Logit) モデル⁹⁾、同一選択肢の複数のネストへの帰属を可能とする CNL (Cross Nested Logit) モデル¹⁰⁾などがあげられる。また、最近発表された GNL (Generalized Nested Logit) モデル¹¹⁾は、それに適切な仮定を付加することにより、NL モデル、そして上記 PCL および CNL を導出することが可能であり、陽的な式構造を持つ IIA 特性緩和モデルの一般型として興味深い性質を持つ。しかしながら、選択肢間の誤差構造を扱うモデルとしては、これらのモデルは現時点では一般的とは言えない。そこで本研究では推定の容易さ、および既存事例の豊富さから、NL モデルおよび Probit モデルを Mixed Logit モデルの比較対象とする。

Mixed Logit モデルを適用した例としては、自動車の車種選択¹⁾、都市間の交通手段選択¹²⁾、都市内の交通手段と出発時刻選択¹³⁾などがあげられ、いずれも Mixed Logit モデルと既存モデル (NL モデルや Probit モデル) との特性比較が試みられているが、わが国では同種の検討は構造化 Probit モデル¹⁴⁾との比較がなされている¹⁵⁾にすぎない。また、離散選択において誤差構造を扱うモデルとしては個人の異質性を考慮する、いわゆる誤差相関を前提としたモデルが各種提案されており^{16),17),18)}、これらも Mixed Logit モデルとの比較分析が期待されるが、内外共にその分析事例は存在しない。以上の事例研究の整理より、本研究では誤差構造を扱う離散選択モデルとして Mixed Logit モデルを幅広く捉え、可能な限り既存モデルとの関連性を整理し、その特性の差異を明らかにする。

(2) Mixed Logit モデルの位置づけ

Mixed Logit モデル (以下必要に応じ MXL と略す) は Logit モデルの効用関数において、

$$U_{im} = V_{im} + [\mu' z_{im} + \varepsilon_{im}] \quad (1)$$

のように、誤差項を選択肢・個人間で相互独立する Gumbel 分布 ε_{im} と、平均0の確率変数ベクトル μ 及び選択肢 i に関する特性変数ベクトル z_{im} から算出される項に分離するモデルである。 μ が確率分布をするため、選択確率および μ の母数パラメータを含むモデルパラメータは、多数の乱数発生によるシミュレーション法により推定される。具体的には、 μ の確率密度関数を $f(\mu|\Omega)$ と定義すれば、 ε_{im} として Gumbel 分布を仮定し

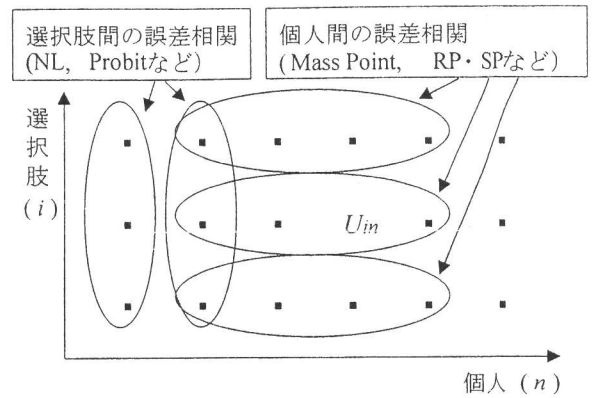


図-1 効用の誤差項相関の捉え方

ているため、通常の Logit モデルと同様に、 μ が所与の条件付き選択確率率は次の通り導かれる (以下必要に応じ個人 n を表すサフィックスは省略)。

$$L_{in}(\mu) = \exp[\beta' x_{im} + \mu_{im}] / \sum_j \exp[\beta' x_{jn} + \mu_{jn}] \quad (2)$$

よって、 μ の分布を考慮すれば、選択確率は確率密度関数を乗じた、

$$P_{in} = \int L_{in}(\mu) f(\mu|\Omega) d\mu \quad (3)$$

で算出される。シミュレーション法を用いれば、 μ の確率分布を有限の乱数により置き換えることができる。ここで、 $f(\mu|\Omega)$ の分布に従う有限個 (R 個) の乱数抽出 (個々の乱数を μ^r とする) を行い、各々について上記確率を算出すれば、

$$SP_{in} = (1/R) \sum_r L_{in}(\mu^r) \quad (4)$$

により、シミュレートされた確率 (SP_{in}) を推計できる。効用関数のパラメータ (β) および $f(\mu|\Omega)$ の母数パラメータ (Ω) の推定は、通常の Logit モデルと同様に、式(4)を用いた対数尤度の最大化により行うことができる。同パラメータ推定は、GAUSS など対数尤度最大化ルーチンを持つソフトウェアを用いればよい。

Mixed Logit モデルの柔軟性は、上記 $\mu' z_{im}$ の設定方法により、誤差構造を特定化する既存モデルを近似的に表現可能なことにある。離散選択モデルにおいて誤差構造を扱う意義は、個人・選択肢間で独立・同一の確率分布をするという仮定を一般化し、1) 選択肢間の誤差相関、2) 個人間の誤差相関 (非観測異質性、複数回答間の誤差系列相関を含む)、3) パラメータ (β) の確率変動らをモデルに反映させることにあるといえよう (図-1)。そしてこれらは従来、各々の誤差構造に応じたモデル開発がなされていた。例えば 1) については Nested Logit (NL) モデルや Probit モデル、構造化 Probit モデル¹⁴⁾が、2) については Mass Point モデルや Mixed Distribution モデル

17), SP と RP モデルを同時に扱うモデル 18), そして 3) については Probit モデルや時間価値分布を扱うモデル 19), 20)などがそれらに相当する。しかし, 誤差構造の定義を一般化した Mixed Logit モデルを用いれば, $\mu' z_m$ の設定を工夫することにより, これらと同様の効果を有するモデル構造を推定することができる。

3. 選択肢間の誤差相関を扱うモデルについて

(1) 乱数データによるモデル特性比較分析

選択肢間の誤差相関および誤差分布の大小関係を扱うモデルとしては Probit モデル, そして NL モデルが一般的である。従来, IIA 特性の緩和方法としてこれらモデルが適用されているが, Mixed Logit モデルでは, z_i の定義を $z_i = \{d_i^1, \dots, d_i^k\}$, μ を σ_k^2 を要素に持つベクトルと定義すれば同様の誤差構造を表現できる。なお, k はネスト k を表す。この定義により, 同じネスト内で同一の誤差項 μ を共有することになる。いま同一ネストに存在する選択肢 i と j ($i \neq j$) の誤差項を取り上げれば, 各々の分散は,

$$\text{Var}[\mu' z_i + \varepsilon_i] = s^2 + \pi^2/6 \quad (5)$$

となる。ここで s^2 は μ の分散である。 $\pi^2/6$ は Gumbel 分布をする ε_i の分散項で, 通常の Logit モデルと同様に分散パラメータを 1 に固定している。また, ij 間の共分散は, 当該 2 選択肢間の誤差項が μ を共有し, ε 項が互いに独立であることを考慮すれば,

$$\text{Cov}[\mu' z_i + \varepsilon_i, \mu' z_j + \varepsilon_j] = s^2 \quad (6)$$

となる。故に, ij 間の誤差相関係数は,

$$\rho = s^2 / (s^2 + \pi^2/6) \quad (7)$$

で算出可能となる。選択肢間の誤差相関に着目すれば, 同様の定義は Probit モデルでは相関係数 ρ を誤差分散共分散行列の要素として直接取り込むことにより可能であり, NL モデルではネストの logsum 変数パラメータ λ を用いることにより, $\rho = 1 - \lambda^2$ なる式で相関係数を算出することができる⁷⁾。

本節ではこれら 3 種類のモデル推定特性を把握するため, 下記に示す手順で作成した乱数データによるモデル構築結果を元に検討を加えることとする。

対象とするのは 1 共通変数と定数項を持つ 3 肢選択モデルである (次式)。

$$P_1 = \frac{e^{\beta X_1 + c_1}}{e^{\beta X_1 + c_1} + e^{\beta X_2 + c_2} + e^{\beta X_3}} \quad (8)$$

ここで 2 番目, 3 番目の選択肢誤差項に相関があるという仮定をおく。そのため NL モデルは下記の式となる。

$$P_1 = \frac{e^{\lambda(\beta X_1 + c_1)}}{e^{\lambda(\beta X_1 + c_1)} + e^{\lambda \ln(\exp[\beta X_2 + c_2] + \exp[\beta X_3])}} \quad (9)$$

なお, 式(9)が下位の誤差分散パラメータを 1 とおいていることに留意すれば, NL モデルの選択肢間の誤差の分散共分散行列は,

$$\frac{\pi^2}{6} \begin{pmatrix} \frac{1}{\lambda^2} & 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{\lambda^2} & \frac{1}{\lambda^2 - 1} \\ 0 & \frac{1}{\lambda^2 - 1} & \frac{1}{\lambda^2} \end{pmatrix} = \frac{\pi^2}{6} \begin{pmatrix} \frac{1}{1-\rho} & 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{1-\rho} & \frac{\rho}{1-\rho} \\ 0 & \frac{\rho}{1-\rho} & \frac{1}{1-\rho} \end{pmatrix} \quad (10)$$

となる^{注2)}。一方, Mixed Logit モデルでは, 式(5)~(7)より, 誤差分散共分散行列は,

$$\begin{pmatrix} \frac{\pi^2}{6} & 0 & 0 \\ 0 & s^2 + \frac{\pi^2}{6} & s^2 \\ 0 & s^2 & s^2 + \frac{\pi^2}{6} \end{pmatrix} = \frac{\pi^2}{6} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{1-\rho} & \frac{\rho}{1-\rho} \\ 0 & \frac{\rho}{1-\rho} & \frac{1}{1-\rho} \end{pmatrix} \quad (11)$$

で与えられる。すなわち, NL モデルと先に示した Mixed Logit モデルでは, ほぼ同一の誤差分散共分散構造を有することが分かる。唯一の相違点である, 選択肢 1 の対角要素についても, Mixed Logit モデルの推定時において, s^2 の項を同対角要素に加えれば, 両者は完全に一致するため, 本項の分析ではその手順を採用している。

シミュレーションにおける乱数の発生手順は下記の通りである。

- ① β の値を設定 ($\beta=0.1, 0.2, 0.3$ の 3 通り設定)
- ② X_1, X_2, X_3 として各々独立に (0,1) の一様乱数を割り当てる
- ③ 選択肢 2 と 3 の誤差相関係数 ρ を設定 ($\rho=0.1, 0.3, 0.5, 0.7, 0.9$ を設定)
- ④ 下記の誤差分散共分散行列に従う乱数 $\varepsilon_1, \varepsilon_2, \varepsilon_3$ を発生

$$\frac{\pi^2}{6} \begin{pmatrix} \frac{1}{1-\rho} & 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{1-\rho} & \frac{\rho}{1-\rho} \\ 0 & \frac{\rho}{1-\rho} & \frac{1}{1-\rho} \end{pmatrix} \quad (12)$$

- ⑤ 定数項を 0 とおいた効用項 $\beta X_i + \varepsilon_i$ を各々の選択肢について推計
- ⑥ 推計された効用項のうち, 最大効用を示した選択肢を選択結果とする

以上の作業を繰り返し, 1000 サンプルを作成した上で, 各々のセットについて, NL, Probit モデル, Mixed Logit モデルを推定する。パラメータは, 共通変数パラメータ

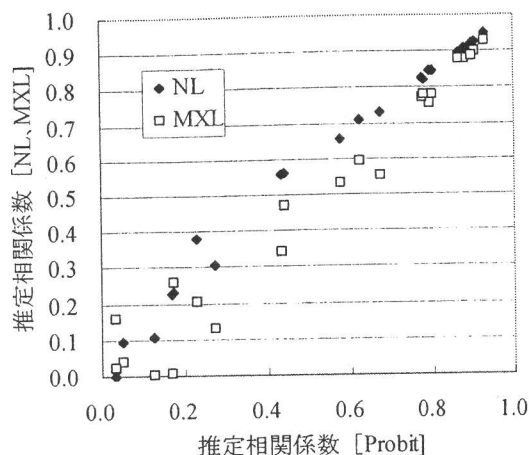


図-2 推定誤差相関係数の比較 ($\beta=0.3$ の例)

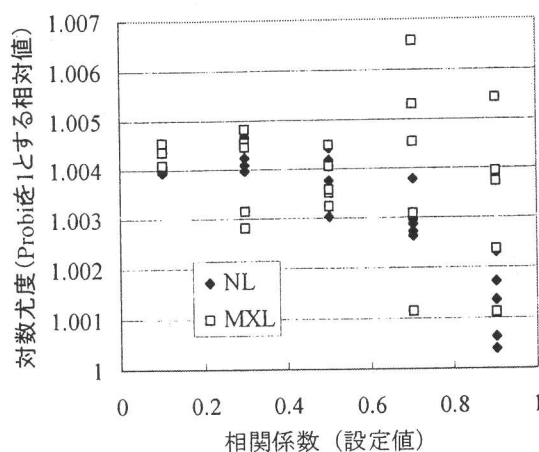


図-3 対数尤度の比較 (対 Probit モデル: $\beta=0.3$ の例)
[縦軸値が小さいほど説明力が高いことを示す]

(β)と定数項が2つ、そして logsum パラメータ (NL)、誤差相関係数パラメータ (Probit モデル) および式(5) s (Mixed Logit モデル) である。推定は ρ と β の組み合わせについて5セットずつ行った。なお、本研究では、Probit モデルの推定には、GHK アルゴリズムを用いたシミュレーション法¹⁴⁾を、NL モデルの推定は同時推定を採用している。また、基本的には Probit モデル、Mixed Logit モデル推定時のシミュレーション個数は各々50個、100個としている。結果の一例として、Probit モデルで推定された相関係数値(ρ)と、NL モデル、Mixed Logit モデル各々で推定された相関係数算出値との関係を図-2に示す。推定相関係数値が小さい場合、結果のバラツキが大きくなる傾向が見られ、かつそのバラツキは Mixed Logit モデルで大きい。しかし各モデルで仮定する誤差分布が異なる (Probit モデルが正規分布で、NL モデルは Gumbel 分布、Mixed Logit モデルはその中間) ことから、そもそも3者の結果は厳密には一致しないが、全体的には3モデル共に概ね同様の推定結果を示すといえよう。最も適合度の高い Probit モデル推定結果を基準としたモデルの対数尤度の相対値を見ると (図-3)、NL モデルは Mixed Logit モデルよりやや優っているが、その度合いは1%未満であり、統計的には3モデル間の説明力の差は認められなかった。

(2) 都市間旅客データによるモデル特性の比較

本節では、実データにより Mixed Logit モデルの特性を把握するため、平成7年の幹線旅客純流動表から作成した都市間個人トリップを用いたモデル構築を行う。なお、LOS データには国土庁 TRANET データを使用している。対象とするのは航空・鉄道・車の3手段で、3手段とも利用可能性をもつ仕事・仕事以外 (各々3000 サンプル抽

出) のトリップを用いた。選択枝間の誤差相関を検討対象とするため、3手段間のネスト構造を3通り設定し、各々について NL モデル、Probit モデル (ネスト内の誤差相関係数を推定)そして Mixed Logit モデルを推定した。推定結果は表-1~3の通りである。また、Mixed Logit モデルのパラメータは多数の乱数発生によるシミュレーション法によるが、ここでは乱数の個数は200とした。乱数個数の変化に対応した推定結果の変動は図-4の通り。図の「変動係数」はパラメータ推定を10回行ったときのパラメータと対数尤度の変動係数である。100~200個程度で安定した値が得られることが分かる。なお、計算時間は標準的なパソコン (CPU400MHz) で乱数個数200の場合、約2~3分である。

表-1~3より、説明力は何れのツリー構造でも NL モデルが優っており、推定 logsum 変数パラメータ値から判断される妥当なモデル構造は、「車- (航空・鉄道)」 (表-3) であることが分かる。また、Probit モデル結果からは、推定誤差相関係数値から、同様の結論を得ているが、Mixed Logit モデルからは明確な結論は引き出せなかった。この要因として、選択枝誤差相関に加えて、選択枝間の誤差分散のスケールの違いなど、ここでは考慮されていない誤差要因の存在が考えられる。事実、選択枝別の誤差分散の相違を考慮すれば、NL や Probit と同様の推定結果が得られるが、これは5.(2)で再度取り上げることとする。理想的には、誤差の分散共分散行列要素の全て (対角要素の1つは1に固定) を Probit モデルで推定できれば、3モデル間のより詳細な特性比較が可能であるが、同モデルの推定は困難であるため、本分析では取り上げていない^{注3)}。

表-1 選択肢間の誤差相関を考慮したモデル(1) [上位：航空，下位：鉄道・車] (()内は t 値)

	MNL	NL	Probit	MXL
時間(G)	-1.144 (28.2)	-1.072 (14.1)	-0.867 (27.5)	-1.146 (34.1)
費用(G)	-3.060 (3.3)	-3.285 (3.9)	-1.071 (1.5)	-3.018 (3.6)
定数項(A)	-2.207 (18.8)	-1.972 (8.2)	-1.834 (18.5)	-2.215 (17.0)
定数項(R)	-0.990 (12.9)	-0.881 (7.1)	-0.803 (12.7)	-0.992 (12.1)
ログサム変数		1.105 (11.8)		
相関係数 (ρ)			0.616 (2.5)*	
s				0.092 (0.3)
初期尤度	-3002.5	-3002.5	-3002.5	-3002.5
最終尤度	-2229.6	-2228.9	-2281.7	-2229.5
DF 調整尤度比	0.2572	0.2574	0.2398	0.2572
サンプル数	3000	3000	3000	3000

表-2 選択肢間の誤差相関を考慮したモデル(2) [上位：鉄道，下位：航空・車] (()内は t 値)

	MNL	NL	Probit	MXL
時間(G)	-1.144 (28.2)	-0.831 (19.1)	-1.006 (29.9)	-1.144 (37.4)
費用(G)	-3.060 (3.3)	-3.040 (1.7)	-3.291 (4.4)	-3.031 (3.6)
定数項(A)	-2.207 (18.8)	-1.132 (9.9)	-1.969 (19.3)	-2.208 (18.2)
定数項(R)	-0.990 (12.9)	-0.409 (4.4)	-0.942 (13.8)	-0.989 (12.4)
ログサム変数		1.969 (13.9)		
相関係数 (ρ)			0.000 (0.01)*	
s				0.022 (0.1)
初期尤度	-3002.5	-3002.5	-3002.5	-3002.5
最終尤度	-2229.6	-2188.1	-2273.9	-2229.7
DF 調整尤度比	0.2572	0.2710	0.2424	0.2572
サンプル数	3000	3000	3000	3000

表-3 選択肢間の誤差相関を考慮したモデル(3) [上位：車，下位：航空・鉄道] (()内は t 値)

	MNL	NL	Probit	MXL
時間(G)	-1.144 (28.2)	-1.591 (20.8)	-0.541 (15.1)	-1.147 (34.2)
費用(G)	-3.060 (3.3)	-6.605 (5.5)	-1.885 (4.4)	-3.026 (3.6)
定数項(A)	-2.207 (18.8)	-2.056 (10.2)	-0.486 (3.4)	-2.206 (18.1)
定数項(R)	-0.990 (12.9)	-0.617 (3.6)	0.038 (0.4)	-0.985 (12.1)
ログサム変数		0.526 (12.3)		
相関係数 (ρ)			0.816 (25.9)	
s				0.130 (0.3)
初期尤度	-3002.5	-3002.5	-3002.5	-3002.5
最終尤度	-2229.6	-2195.2	-2244.4	-2229.5
DF 調整尤度比	0.2572	0.2686	0.2522	0.2572
サンプル数	3000	3000	3000	3000

時間は100分，費用は10万円単位。(A)(R)(C)は各々航空・鉄道・車，(G)は共通変数

* は相関係数の2乗の推定値に関する t 値

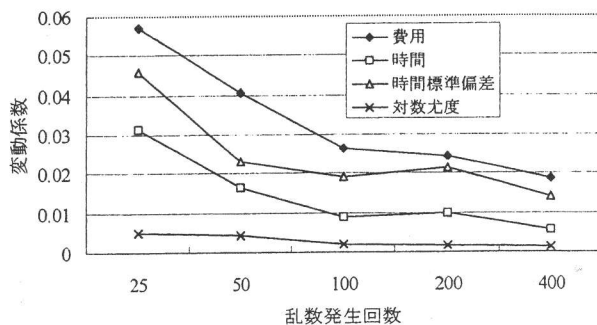


図-4 乱数発生回数による推定精度の変動

4. 個人の非観測異質性を扱うモデルについて

(1) Mixed Logit モデルと Mass Point モデルの比較

個人から複数の選択結果を得る SP 調査や，パネルデータにおいて，個々人の非観測異質性を考慮するモデル推定方法として Mass Point モデルや Mixing Distribution モデルが開発され，交通手段選択について少なからず研究がなされている。Mass Point モデルは異質性を表現する誤差をノンパラメトリックに表現する方法で，Mixing Distribution モデルはパラメトリックな方法であるが，基本的には両者ともに前述の式(3)と同じ選択確率式を採用していることになる。つまり，パラメトリック手法で

ある Mixed Logit モデルは、Mixing Distribution モデルに他ならず、パラメータ推定手法や開発経緯の相違に基づき別名が冠せられたといえよう。Mass Point モデルと Mixing Distribution モデルの比較検討は既に報告されている¹⁷⁾が、選択肢数や Mass Point 数が3を越える場合についてはその比較事例がない。本質的に二項選択と多岐選択でこれらのモデル特性が変化する訳ではないが、新たな事例を提供することを目的に、本節では3選択肢を有する SP データを元に、Mixed Logit モデル（すなわち Mixing Distribution モデル）と Mass Point モデルとの比較検討を行う。

扱うデータは、平成4年に行われた交通情報提供に対する経路選択利用意向調査である²¹⁾。調査では、横浜市青葉区から都心部に向かう特定 OD（東名横浜 IC 付近から首都高霞ヶ関ランプ付近）について、3つの経路（高速道路、一般道→高速道路、一般道路）を例示し、各々に所要時間情報（分析者がランダムに設定）がなされた場合の選択結果を記録している。調査データでは、5種類の SP 回答を得ているが、本分析では簡単のため、そのうち1個人について3種類の SP 結果を取り上げ、モデル構築を行う。有効サンプル人数が172であったため、ここでは516サンプルを用いることになる。

比較に用いた Mass Point モデルはわが国で一般的に用いられている Lindsay 型のモデルである。個人当たりの SP 回答数を T としたとき、同モデルによる選択確率は、

$$P_m = \sum_{m=1}^M \prod_{t=1}^T \left[\frac{\exp[V_{int} + \xi_{mi}]}{\sum_j \exp[V_{jnt} + \xi_{mj}]} \right]^{\delta_{int}} \times \rho_m \quad (13)$$

$$\rho_m = \frac{\exp[\alpha_m]}{\sum_{m'} \exp[\alpha_{m'}]} \quad (14)$$

（ただし、 $\xi_{mj} = 0$, $\alpha_M = 0$, δ_{int} は n 番目サンプルの t 番目回答が選択肢 i を選んだとき1, それ以外0のダミー変数）

で与えられる。ここで、 ξ は複数回答に共通する、個人及び選択肢別の誤差成分 (Mass Point t) であり、 ρ は各 Mass Point の重みである。なお、重みの総和が1となる制約を満たすために、ここでは上記 logit 式を採用している。

Mixed Logit モデルによる選択確率は、式(13)と同様に、

$$P_m = \int \prod_{t=1}^T \left[\frac{\exp[V_{int} + \mu'_i z_{im}]}{\sum_j \exp[V_{jnt} + \mu'_j z_{jm}]} \right] f(\mu | \Omega) d\mu \quad (15)$$

（ただし、 $z_m = \{d_1, \dots, d_{J-1}\}$, d_j は $i=j$ のとき1 それ以外0のダミー変数）

となる。

パラメータ推定は GAUSS を使用し、 ρ_m の値は α_m 推定後、式(14)から算出した。推定結果を表-4に、説明力指標である尤度比の値を図-5に各々示す。なお、表中 MP(2)は Mass Point 数2を、MNL(2)とあるのは、「個人が3つの SP 調査結果、全て同じ選択肢を選んだ」ことを示すダミー変数を取り込んだモデルを表す。後者は、個人の選択傾向の偏りを表現する参考指標として採用した変数であり、SP バイアスを簡便に表す一方法と見なせる。この簡便法が、他モデルに比してどの程度の説明力を有するかを比較する目的で推定を行う。

推定結果をみると、Mixed Logit モデル、Mass Point モデルともに、同一回答ダミーを有する MNL モデルに比しても説明力が大幅に向上し、かつ Mass Point 数3のモデルは、Mixed Logit モデルとほぼ同じ尤度比を有する。各々のモデルの推定パラメータ値は図-6に要約されている。Gumbel 分布に従う誤差分散が相対的に低下するため、Mixed Logit モデルや Mass Point モデルのパラメータ値の絶対値が大きくなることが確認され、かつ両モデルの推定値は比較的同一傾向にあることが分かる。

以上より、Mixed Logit モデルでも Mass Point モデルと同等の誤差構造を表現可能であるといえよう。しかし、説明力からは Mass Point 数が3以上のモデルは Mixed Logit モデルを上回っている。図-7は Point 数5の Mass Point モデルの推定 Mass Point と、Mixed Logit モデルから推定された誤差分散及び選択肢定数項から推計される誤差の確率密度関数をプロットした結果である。これより分かるように、ノンパラメトリック手法である Mass Point モデルがより柔軟に誤差構造を表現可能であることが確認できる。しかしながら、Mass Point 数3のモデルにおいてもパラメータ数は Mixed Logit より4つ多くなる。Mass Point モデルでは、Mass Point に関わる総パラメータ数は選択肢数を J , Mass Point 数を MP としたとき最大、 $MP \times (J-1) + (MP-1)$ となるのに対し、Mixed Logit モデルは高々 $(J-1) \times 2$ である。適切な Mass Point 数をモデル構築前に先決できないことを考慮すれば、Mixed Logit の実用性は高いと判断できるが、反面 Mixed Logit モデルの誤差型も先決はできない（例えば正規分布にするか、対数正規分布にするか）のも事実である。この問題については、多くの事例を積み重ね、経験的に Mass Point 数と、Mixed Logit モデルの誤差型との関連性を把握する必要がある。

表-4 Mixed Logit モデルと Mass Point モデルの推定結果比較 [() 内 t 値]

	MNL(1)	MNL(2)	MXL	MP(2)	MP(3)	MP(4)	MP(5)
所要時間(G)*	-0.0581 (9.9)	-0.0581 (9.6)	-0.0922 (8.0)	-0.0715 (9.5)	-0.0854 (10.3)	-0.0902 (9.6)	-0.0964 (8.9)
経験ダミー(高)*	0.550 (2.4)	0.5038 (2.2)	1.091 (1.9)	0.5199 (1.4)	0.4393 (1.2)	0.5843 (1.5)	0.5753 (1.0)
ICダミー(高)*	-0.280 (1.2)	-0.2648 (1.1)	-0.7562 (1.2)	-0.3413 (0.8)	-0.7365 (2.2)	-1.003 (2.4)	-0.5707 (1.1)
同一回答ダミー(高)		0.3933 (1.8)					
同一回答ダミー(一高)		-1.783 (4.4)					
定数項(高)	-0.8260 (3.6)	-1.014 (4.0)	-1.375 (2.6)				
定数項(一高)	-1.783 (10.0)	-1.224 (6.1)	-2.906 (6.8)				
σ (高)			2.603 (6.9)				
σ (一高)			1.818 (4.0)				
ξ_1 (高)				0.2628 (0.7)	7.123 (0.5)	-1.224 (1.0)	7.129 (1.2)
ξ_2 (高)				-4.137 (5.2)	-0.4461 (1.1)	-0.3850 (1.0)	1.648 (0.7)
ξ_3 (高)					-5.370 (5.5)	-5.620 (6.4)	-1.372 (1.4)
ξ_4 (高)						9.399 (0.5)	-1.478 (1.4)
ξ_5 (高)							-6.601 (4.1)
ξ_1 (一高)				-1.192 (3.8)	-5.912 (0.5)	0.5604 (0.6)	-5.718 (1.1)
ξ_2 (一高)				-2.810 (6.3)	-1.337 (5.7)	-1.900 (4.4)	0.2221 (0.1)
ξ_3 (一高)					-3.876 (5.9)	-4.001 (7.6)	-4.022 (2.1)
ξ_4 (一高)						-5.396 (0.8)	-0.0997 (0.1)
ξ_5 (一高)							-4.155 (6.6)
α_1				0.8723 (2.9)	-0.4036 (1.0)	-0.4973 (0.5)	-0.6834 (1.1)
α_2					1.071 (3.8)	1.620 (3.6)	0.2919 (0.4)
α_3						0.6236 (1.3)	0.6529 (1.3)
α_4							-0.3821 (0.5)
ρ_1				0.705	0.146	0.071	0.093
ρ_2				0.295	0.636	0.592	0.246
ρ_3					0.218	0.219	0.353
ρ_4						0.118	0.125
ρ_5							0.183
初期尤度	-484.0	-484.0	-484.0	-484.0	-484.0	-484.0	-484.0
最終尤度	-414.9	-395.3	-369.4	-373.7	-365.9	-361.3	-358.7
DF 調整尤度比	0.139	0.178	0.232	0.222	0.236	0.243	0.246
サンプル数	516	516	516	516	516	516	516

*時間は分単位。(高)は高速道、(一高)は一般道→高速道利用、(G)は共通変数を各々表す。「経験ダミー」は「対象ODを過去1年間に3回以上利用経験有り」が1それ以外は0、「ICダミー」は居住地が最寄りICから6Km以上が1それ以外が0のダミー変数。

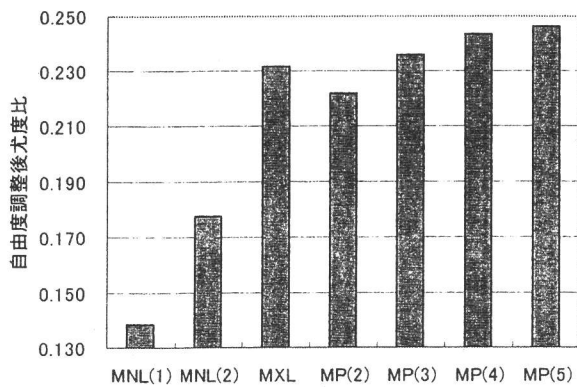


図-5 MNL, MXL, MPモデルの尤度比比較

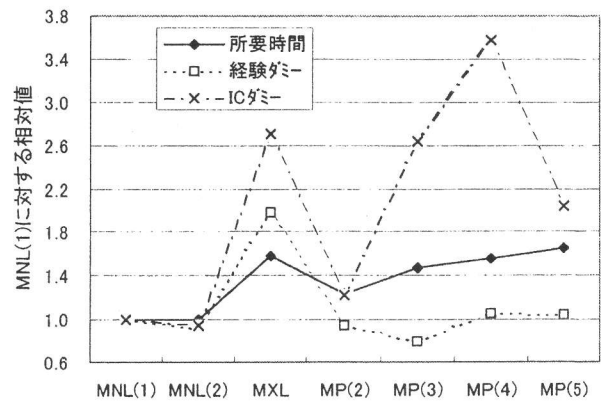


図-6 各モデル推定パラメータの相対比較

5. 確率的変動係数モデルについて

(1) Mixed Logit モデルと Taste Variation モデル

効用関数のパラメータ β が個人間でバラツキを持つ、いわゆる random coefficient (確率変動係数) モデルは従来 Probit モデルの応用として定式化されてきた⁹⁾。効用関数の1パラメータが確率的に変動する例をとり簡単に同モデル式をまとめる。

$$U_{in} = \beta x_{in} + \varepsilon_{in} \quad (17)$$

$$\varepsilon_{in} \sim N(0, \sigma^2)$$

において、

$$\beta = \bar{\beta} + \eta_n \quad (18)$$

$$\eta_n \sim N(0, \sigma_\beta^2)$$

と仮定したときに、誤差の分散項、共分散項が各々

$$\text{Var}[x_{in}\eta_n + \varepsilon_{in}] = x_{in}^2\sigma_\beta^2 + \sigma^2 \quad (19)$$

$$\text{Cov}[x_{in}\eta_n + \varepsilon_{in}, x_{jn}\eta_n + \varepsilon_{jn}] = x_{in}x_{jn}\sigma_\beta^2 \quad (20)$$

となることから、例えば選択枝数が2のときの Probit モデル誤差分散共分散行列を

$$\sigma_\beta^2 \begin{bmatrix} x_{1n}^2 & x_{1n}x_{2n} \\ x_{1n}x_{2n} & x_{2n}^2 \end{bmatrix} + \sigma^2 \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \quad (21)$$

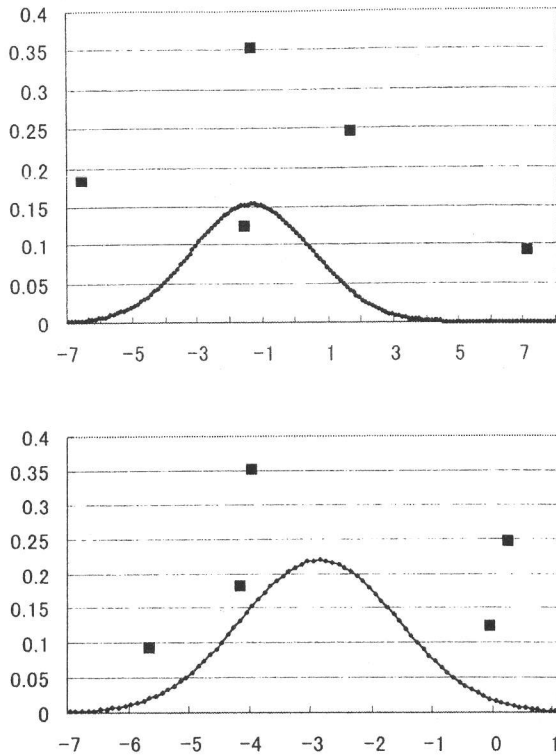
で定式化できる。これが Probit モデルにおける random coefficient モデル、ないしは“taste variation”モデルである。無論、上記式は3以上の選択枝数にも、確率変動パラメータ数を2以上にも拡張可能である。

Mixed Logit モデルにおいては、同様の式は(1)式中の z_{in} を確率的に変動するパラメータに乗ぜられる変数値 x_{in} で置き換えることにより得られる。すなわち、式から理解されるとおり、誤差分散が変数 x_{in} に比例する、いわゆる分散スケールの違いを扱うモデルと、パラメータが確率的に変動する random coefficient モデルは同一の式となり、両者の区別は解釈の相違のみに基づくことになる。

(2) 時間価値分布モデルの適用性

交通計画における確率的変動係数モデルの具体的な適用例として、時間価値 ω の分布を明示的に扱うモデルが挙げられよう^{19), 20)}。これは、Mixed Logit モデルでは、

$$\theta(\omega \cdot \text{time} + \text{cost}) = \theta_1 \cdot \text{time} + \theta \cdot \text{cost} \quad (22)$$



図一七 MXL と MP(5)の推定誤差結果比較

[上段：高速道路，下段：一般道→高速道 誤差項]
[横軸は ξ_m (Mass Point モデル)，定数項を中心とする誤差 (MXL モデル) を，縦軸は ρ_m (Mass Point モデル)，誤差の確率密度 (MXL モデル) を各々表す]

(2) Mixed Logit モデルと RP・SP 誤差相関モデル

個人複数データ間の誤差の相関関係を扱うモデルとして、RP、SP データ間の系列相関を持つモデルが各種提案されている¹⁸⁾。同様のモデルは Mixed Logit モデルでも定義可能である。すなわち、前述の(9)式の複数データ総数を表す T を一つの RP と複数の SP に置き換え、SP モデルの効用誤差項のスケールパラメータ λ を導入すれば、

$$P_{in} = \int \left[\frac{\exp[V_{inT} + \mu' z_{in}]}{\sum_j \exp[V_{jnT} + \mu' z_{jn}]} \right] \times \prod_{t=1}^{T-1} \left[\frac{\exp[\lambda(V_{int} + \mu' z_{in})]}{\sum_j \exp[\lambda(V_{jnt} + \mu' z_{jn})]} \right] f(\mu|\Omega) d\mu \quad (16)$$

(ただし、 $t=1, \dots, T-1$ は SP データを、 T は RP データを表す)

なる式でパラメータを推定すればよい。なお、本研究では筆者らが適切な検証データを保有していないため、上記の式の提示に止めることとする。

表-5 時間価値分布を考慮したモデル (パラメータ右の()内は t 値)

	MXL モデル			Probit モデル	MNL モデル
	仕事	仕事以外	全目的	仕事	仕事
時間(G)	-2.092 (18.9)	-1.529 (17.7)	-1.695 (25.0)	-1.713 (19.8)	-1.144 (28.2)
費用(G)	-7.204 (5.8)	-7.361 (8.0)	-7.818 (10.5)	-6.039 (6.1)	-3.060 (3.3)
定数項(A)	-3.352 (19.4)	-3.022 (17.5)	-2.958 (25.2)	-2.739 (19.8)	-2.207 (18.8)
定数項(R)	-1.553 (14.7)	-1.062 (10.9)	-1.211 (17.4)	-1.272 (14.4)	-0.990 (12.9)
時間σ(G)	0.9012 (13.0)	0.7284 (12.9)	0.7694 (16.5)	0.7303 (13.1)	---
初期尤度	-3002.5	-3002.5	-6005.0	-3002.5	-3002.5
最終尤度	-2116.8	-2123.2	-4295.4	-2098.7	-2229.6
DF 調整尤度比	0.2945	0.2924	0.2842	0.3005	0.2569
サンプル数	3000	3000	6000	3000	3000
VT[円/分]	290	208	217	284	---
VTのσ[円/分]	125	99	98	121	---

時間は100分, 費用は10万円単位. (A)(R)(C)は各々航空・鉄道・車, (G)は共通変数

表-6 時間価値分布および選択肢間誤差相関を考慮した MXL モデル (パラメータ右の()内は t 値)

	トリップ目的: 仕事		
	航空- (鉄道・車)	鉄道- (航空・車)	車- (航空・鉄道)
時間(G)	-2.138 (16.9)	-2.167 (12.9)	-2.312 (16.8)
費用(G)	-7.722 (6.1)	-7.749 (5.9)	-8.325 (6.1)
定数項(A)	-3.406 (16.6)	-3.451 (12.7)	-3.509 (17.7)
定数項(R)	-1.601 (13.9)	-1.621 (10.6)	-1.596 (12.5)
時間σ(G)	0.8964 (11.9)	0.9200 (10.0)	0.9850 (12.2)
s	0.1402 (0.2)	0.3305 (0.6)	1.247 (3.6)
初期尤度	-3002.5	-3002.5	-3002.5
最終尤度	-2104.5	-2108.1	-2103.3
DF 調整尤度比	0.2989	0.2977	0.2993
サンプル数	3000	3000	3000
VT[円/分]	277	280	278
VTのσ[円/分]	116	119	118

時間は100分, 費用は10万円単位. (A)(R)(C)は各々航空・鉄道・車, (G)は共通変数

において, θ_1 を確率変動するパラメータとして推定し, その推定標準偏差値を θ で除することにより, 時間価値の標準偏差を得ることに相当する.

本分析では, 3章と同じ平成7年の幹線旅客純流動表から作成した都市間個人トリップを用いたモデル構築を行い, 先に引用した Probit モデルとの比較を行う. 対象とするのは航空・鉄道・車の3手段で, 3手段とも利用可能性をもつ仕事・仕事以外 (各々3000 サンプル抽出) のトリップを用いた. (3.(2)と同じデータ)

都市間交通では距離帯が広域にわたるため, 直感的に時間価値にバラツキがあると想定される. 実用的にはサンプルを距離帯別にセグメント化し, 距離帯別モデルを構築することで時間価値の相違に対応しているが, 本分析では時間価値が正規分布に従っていることを仮定し, 各種のモデルを推定した (表-5). 結果より, 時間価値 (表中「VT」) 分布を仮定したモデルは通常の MNL モデルに比して説明力 (対数尤度) が大幅に改善されるとともに, 時間価値分布のパラメータ (表中「時間σ」) も有意であることが確認できる. 推定パラメータから算定される時間価値の標準偏差も常識の範囲内の値である.

また, Probit モデルとの同一変数に対する推定パラメータ値の比較 (「仕事」目的のみ) からは, 理論的に導かれる Logit モデルと Probit モデルとのパラメータ比 ($\pi/\sqrt{6}$) を保持した構造となっていることが確認され, 両モデルがほぼ同様の説明力を持つことがわかる.

また, 時間価値分布を表現することにより, 誤差項に含まれていた同成分が除かれる効果として, 選択肢間誤差成分が明瞭に推定できることを示す. 表-6は, 仕事目的について, 表-1~3と同様の選択肢間誤差相関もあわせて推定した結果である. 表の推定誤差分散(s)より, 「車- (航空・鉄道)」というツリー構造 (誤差構造) が認められるし, 同モデルは最も高い説明力を有している. このように, 誤差構造を適切に分解し, 推定できるのも Mixed Logit モデルの利点と言えよう.

時間価値分布を用いる古典的手段分担モデルとしては犠牲量モデルが挙げられるが, ここで推定した Mixed Logit モデルは, 時間価値の相違に起因した各個人の選択結果の違いを表し得る, 犠牲量モデルと類似した特性も有している. 図-8~10は表-5の「仕事目的」の Mixed Logit モデル推定パラメータと, 推定に使用したサンプル

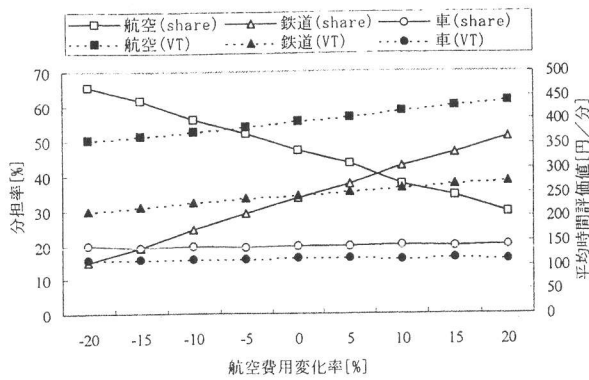


図-8 Mixed Logit モデル感度分析 [航空費用変化]

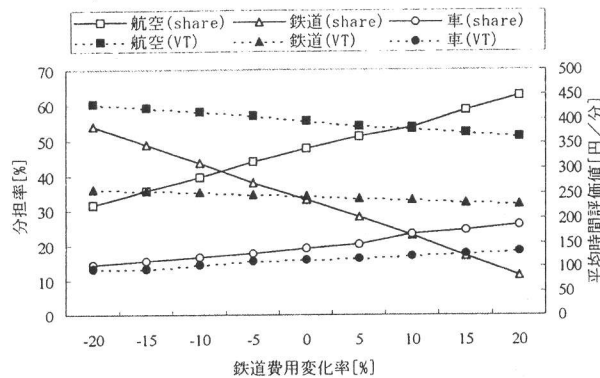


図-9 Mixed Logit モデル感度分析 [鉄道費用変化]

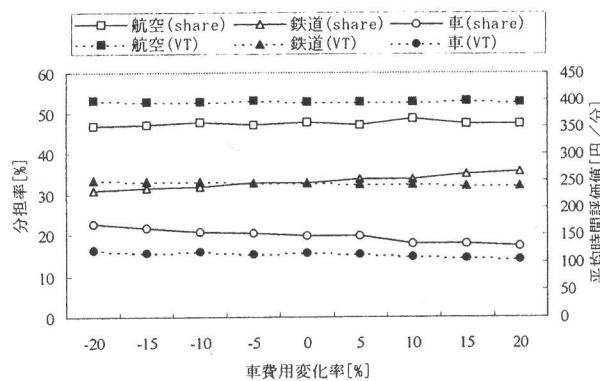


図-10 Mixed Logit モデル感度分析 [車費用変化]

の平均的交通サービス値を用いた感度分析結果である。10000 個の正規乱数を発生させることで、例えば 10000 人の時間価値の異なる個人をシミュレートし、各々の最大確率を与える選択肢を選択結果として集計分担率を算出している。参考として、各条件下の各モード利用の平均時間評価値 (図中「VT」) も表示した。図-8を見ると、航空費用の増加に伴い、鉄道分担率が上昇することが確認できるが、同時に車の分担率は殆ど変化しないことが分かる。また、航空と鉄道の平均時間評価値は共に上昇している。これより、本モデルでは、航空費用の増加は、航空利用者の内の時間評価値が低いトリップの鉄道への転換を表すことが理解される。また、時間価値分

布を考慮したモデルが従来型モデルより説明力が向上しているのも、時間評価値が高いトリップが航空を利用し、その逆に車利用者の時間評価値が低いという現象を適切に表現していることによる。このように、時間価値分布を扱うモデルを用いれば、単に分担率の変化だけでなく、各交通手段の質の変化 (この場合時間評価値の相違) をも分析対象とすることが可能となる。これは従来型の Logit モデルでは扱うことができなかった利点である^{注4}。交通サービス変化に対する異質性を考慮した評価など、例えば Equity に関わる分析への展開が考えられよう。

6. おわりに

Mixed Logit モデルの汎用性に着目し、本論文では、① 選択枝誤差構造、② 誤差の系列相関、③ パラメータ確率変動 の各々の既存手法と Mixed Logit モデルとの特性比較を行った。個々の結果の再掲は避けるが、Mixed Logit モデルを通じて、今まで別個に扱われてきた幾つかの手法間に本質的な関連性があることが示された。誤差あるいはパラメータの分布を基軸とした離散選択モデルの整理を行い得たことも、本論文の成果といえよう。

しかしながら残された課題も少なからず存在する。以下に列記し、今後の展開の指針としたい。

- 1) データ特性を考慮した、NL モデル、Probit モデル、Mixed Logit モデルの適切な使い分けに関する分析
- 2) SP,RP の統合利用方法に関する Mixed Logit モデルの実データによる検証
- 3) 時間価値分布モデルの実用性の検討 (適用が相応しい場面の例証)

謝辞：本研究では、Mixed Logit モデル推定にはカリフォルニア大学 Berkeley 校の Train 教授作成のプログラムを、Probit モデル推定には東京工業大学屋井研究室作成のプログラムを各々使用した。また、Mass Point モデル推定には山梨大学西井研究室作成のプログラムを参考にさせて頂いた。ここに記して謝意を表する次第である。最後に、投稿時に本論文が抱えていた幾つかの問題点を的確に指摘いただいた査読者にも深謝したい。

付録

注1：原文は”any random utility model can be approximated arbitrarily closely by a mixed logit with an error-components structure and appropriate choice of variables and density function”¹⁾

注2：NL モデルの上位ツリーの誤差項を ε_U 、下位ツリーの誤差項を分散パラメータが1の ε_L とする。各効用項は、

$$U_1 = \beta X_1 + c_1 + \varepsilon_u + \varepsilon_{l1}$$

$$U_2 = \beta X_2 + c_2 + \varepsilon_u + \varepsilon_{l2}$$

$$U_3 = \beta X_3 + \varepsilon_u + \varepsilon_{l3}$$

であり、式(9)のログサムパラメータの定義から、

$$\text{var}[\varepsilon_u + \varepsilon_{l.}] = \pi^2/6 \lambda^2,$$

$$\lambda^2 = \frac{\text{var}[\varepsilon_{l.}]}{\text{var}[\varepsilon_u + \varepsilon_{l.}]} = 1 - \frac{\text{var}[\varepsilon_u]}{\text{var}[\varepsilon_u] + \text{var}[\varepsilon_{l.}]}$$

$$= 1 - \frac{\text{cov}[\varepsilon_u + \varepsilon_{l2}, \varepsilon_u + \varepsilon_{l3}]}{\text{var}[\varepsilon_u + \varepsilon_{l.}]} = 1 - \rho$$

であり、式(10)の分散共分散行列を得ることができる。

注3：実際には誤差分散共分散行列の全ての要素をパラメータとする（この場合、パラメータ数は5）Probitモデルの推定を試みたが、分散パラメータが発散し、推定値を得ることはできなかった。

注4：費用を「費用/年収」とすることも考えられるが、時間価値の分布を直接表現することにはならない。

参考文献

- 1) Brownstone, D. and Train, K.: Forecasting new product penetration with flexible substitution patterns, *J. of Econometrics*, Vol.89, pp.109-129, 1999.
- 2) <http://emlab.berkeley.edu/users/train/index.html>
- 3) LIMDEP ver.7.0, Econometric Software, Inc.
- 4) McFadden, D.: A method of simulated moments for estimation of discrete response models without numerical integration, *Econometrica*, Vol.57, No.5, pp.995-1026, 1989.
- 5) McFadden, D. and Train, K.: Mixed MNL models of discrete choice, working paper, Dept. of Economics, University of California, Berkeley, 1997.
- 6) Train, K.: *Qualitative Choice Analysis*, MIT press, 1986.
- 7) Ben-Akiva, M. and Lerman, S.R.: *Discrete Choice Analysis*, MIT Press, 1985.
- 8) 福田大輔, 森地茂: 観光目的地選択行動に対する精緻化された個人選択モデルの適用可能性の検討, *土木計画学研究・講演集*, No.22(2), pp.655-658, 1999.
- 9) 藤原章正, 杉恵頼寧, 岡村敏之, 神田佑亮: 選択肢間の類似性を考慮した時刻選択モデル, *土木計画学研究・講演集*, No.22(1), pp.401-404, 1999.

- 10) Vovsha, P.: The Cross-Nested Logit Model: Application to mode choice in the Tel-Aviv Metropolitan Area, TRR1607, pp.6-15, 1997.
- 11) Wen, C. and Koppelman, F.S.: The Generalized Nested Logit Model, presented at the 79th TRB, paper number 00054312, 2000.
- 12) Bhat, C.: Accommodating variations in responsiveness to level-of-service measures in travel mode choice modeling, *Transportation Research A*, Vol.32, No.7, pp.495-507, 1998.
- 13) Bhat, C.: Accommodating flexible substitution patterns in multi-dimensional choice modeling: formulation and application to travel mode and departure time choice, *Transportation Research B*, Vol.32, No.7, pp.455-466, 1998.
- 14) 屋井鉄雄, 中川隆広, 石塚順一: シミュレーション法による構造化プロビットモデルの推定特性, *土木学会論文集*, No.604/IV-41, pp.11-21, 1998.
- 15) 清水哲夫, 屋井鉄雄, 坂井康一: 鉄道経路選択モデルにおける選択肢間の類似性の表現方法, *土木計画学研究・講演集*, No.21(1), pp.459-460, 1998.
- 16) 張峻屹: 異質性を考慮した交通需要モデルのダイナミック分析, *日交研シリーズ A-186*, 1995.
- 17) 西井和夫, 北村隆一, 近藤勝直, 弦間重彦: 観測されていない異質性を考慮した繰り返しデータによるパラメータ推定法: Mass Point Model と Mixing Distribution Model, *土木学会論文集*, No.506, pp.25-33, 1995.
- 18) 森川高行, 山田菊子: 系列相関を持つ RP データと SP データを同時に用いた離散型選択モデルの推定法, *土木学会論文集*, No.476, pp.11-18, 1993.
- 19) Ben-Akiva, M., Bulduc, D. and Bradley, M.: Estimation of travel choice models with randomly distribution values of time, TRR, 1413, pp.88-97, 1993.
- 20) Alam, M.J., Ohta, K. and Harata, N.: Random distribution of value of time in discrete choice model for economic analysis of transportation projects, *土木学会第51回年講*, pp.378-379, 1996.
- 21) 森地茂, 兵藤哲朗, 小川圭一: 情報提供システム評価のための交通行動分析手法に関する研究, *交通工学*, Vol.30, No.3, pp.21-29, 1995.

(1999.8.25 受付)

COMPARISON ANALYSES ON MIXED LOGIT MODEL BASED ON ITS FLEXIBILITY

Tetsuro HYODO and Xiang ZHANG

Mixed Logit model is developed recently as a strong tool which can approximate arbitrarily any random utility models. However, the flexibility and the applicability have not been well examined. This paper aims to clarify the attributes and summarize the relationship between the Mixed Logit model and other developed methods. We test its flexibility from the following aspects: 1) error structure among alternatives, 2) unobserved heterogeneity and 3) random coefficient model. Some simulation data or actual travel data are used for the model estimations. The results showed that the Mixed Logit model has high flexibility. Finally, we summarize its applicability and the further topics to be studied.