## 高次元パンルヴェ系の初期値空間と対称性

竹縄 知之

東京海洋大学

2021年3月18日,日本数学会,慶應大学

#### 目標

高階の力学系の初期値空間を作り、対称性を調べる

## 目次

- イントロダクション
- ② 2次元の例
- 3 高次元の場合の用語と基本性質
- 高次元の例

#### パンルヴェ方程式

- 1900 年頃に Painlevé および Gambier によって発見された 6 個の 2 階非線形常微分方程式  $P_{\rm I},\cdots,P_{\rm VI}$ .
- [坂井 2001] の有理曲面による分類では8種類.
- 例: P<sub>IV</sub> のハミルトン系表示 [岡本 1980]

$$\frac{\partial q}{\partial t} = \frac{\partial H_{IV}}{\partial p}, \quad \frac{\partial p}{\partial t} = -\frac{\partial H_{IV}}{\partial q}, 
H_{IV} = qp(q+p-(a_0+a_1+a_2)t) - a_1q + a_2p$$
(1)

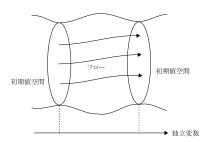
- 複素解は有限個の固定された点  $(P_{\text{IV}} \text{ のときは } t = \infty)$  を除いて有理型だが、線形常微分方程式の解やアーベル・ヤコビ関数では書けない。
- シュレジンジャー系 (= フックス型線形常微分方程式)

$$\frac{dY}{dx} = \left(\frac{A_0}{x} + \frac{A_1}{x - 1} + \frac{A_t}{x - t}\right)Y$$

およびその退化から、モノドロミーまたはストークス係数保存変形によって 導かれる.

#### 初期値空間(2次元)

- [岡本 1977] でパンルヴェ方程式に対して導入された.
- [坂井 2001] では離散パンルヴェ方程式の分類に用いられた.
- パンルヴェ方程式の解が正則な葉層構造を定義するように初期値の空間を拡大したもの.



• 離散方程式の場合はコンパクトだが、微分方程式の場合はそこからいくつかの1次元部分多様体を除いた開集合.

#### 岡本・坂井の初期値空間の特徴

- 複素射影平面  $\mathbb{P}^2$  や複素射影直線の直積  $\mathbb{P}^1 \times \mathbb{P}^1$  からブローアップで作られる.
- ブローアップする点の位置は独立変数 t やパラメータ  $a_i$  に依存するので,力学系が定めるのは曲面の自己同型ではなく,異なる曲面同士の同型写像.初期値空間とは曲面あるいはその族のこと.
- ・ 楕円曲面の一般化になっている:反標準因子がただ一つの既約分解を持ち、 それが楕円曲線の退化で得られるものになっている.
- ・ 方程式の対称性(ベックルンド変換)が曲面上のピカール群に対するクレモナ等長変換から得られる。
- いくつかの離散パンルヴェ方程式は、連続のパンルヴェ方程式に対するベックルンド変換にもなっているが、その場合には離散の場合の初期値空間から、反標準因子の既約分解の台を除くことで連続の場合の初期値空間が得られる。
   ←今回はこれに注目して高次元の初期値空間を作る。

## 目次

- イントロダクション
- ② 2次元の例
- 3 高次元の場合の用語と基本性質
- 高次元の例

## 2次元の例:あとで高次元の場合と比較する

$$P_{\text{IV}}: \frac{\partial q}{\partial t} = \frac{\partial H_{\text{IV}}}{\partial p}, \quad \frac{\partial p}{\partial t} = -\frac{\partial H_{\text{IV}}}{\partial q}, \quad \frac{\partial b}{\partial t} = d := a_0 + a_1 + a_2$$

$$H_{\text{IV}} = qp(q + p - b) - a_1q + a_2p.$$
(2)

に対してベックルンド変換(の一つ):  $\varphi$ :  $(q, p; a_0, a_1, a_2) \mapsto (\bar{q}, \bar{p}; \bar{a}_0, \bar{a}_1, \bar{a}_2)$ :

$$\bar{q} = -q - p + b - \frac{a_2}{q}, \quad \bar{p} = q$$

$$(\bar{a}_0, \bar{a}_1, \bar{a}_2) = (a_1 + a_2, -a_2, a_0 + a_2)$$
(3)

を考える.これは一見5次元の写像に見えるが,2回合成した  $arphi^2$  を考えると,

$$\bar{q} = -\bar{p} - q + b - \frac{a_0 + a_2}{\bar{p}}$$

$$\bar{p} = -q - p + b - \frac{a_2}{q}$$

$$\bar{p} = -q - p + b - \frac{a_2}{q}$$

$$(4)$$

$$(\bar{a}_0, \bar{a}_1, \bar{a}_2) = (a_0, -a_0 - a_2, a_0 + a_1 + 2a_2) = (a_0, a_1 - d, a_2 + d)$$

となり、2次元の差分型の非自励離散力学系とみなせる(第2差分パンルヴェ方程式).

#### 自励系の場合

d=0 の場合,  $\varphi^2$  は自励系であり,

$$K = -a_1q + a_2p - bqp + q^2p + qp^2$$
 (5)

という保存量を持つ.

#### QRT 写像

- 保存量から d=0 の場合の  $\varphi^2$  が復元できる.
- (5) を p についての 2 次方程式とみなし、解と係数の関係を用いると、

$$\bar{p} = -q - p + b - \frac{a_2}{q} \tag{6}$$

同様に、qについて

$$\bar{q} = -q - \bar{p} + b + \frac{a_1}{\bar{p}} \tag{7}$$

- (6)(7) は d=0 の場合の  $\varphi^2$  と一致する.
- このような方法は, [latrou-Roberts 2001] および [津田 2004] によって指摘され, 得られる自励系は Quispel-Roberts-Thompson 写像 [QRT 1989] と呼ばれる.

#### 初期値空間の構成

- 一般に双有理写像  $\phi: \mathbb{C}^2 \to \mathbb{C}^2$  に対し,以下のような一連の操作を考える.
  - (i) 相空間  $\mathbb{C}^2$  を  $\mathbb{P}^1 \times \mathbb{P}^1$  にコンパクト化
- (ii)  $\phi: \mathbb{P}^1 \times \mathbb{P}^1 \to \mathbb{P}^1 \times \mathbb{P}^1$  の不確定点をブローアップ. 得られる曲面はパラメーター  $A = (a_0, a_1, a_2, b)$  の値に依存するので  $X_A$  と書く.
- (iii)  $\phi: X_A \to X_{\bar{A}}$  の不確定点をブローアップ. 得られる曲面を  $X_A$  と置き直し、以後この操作を繰り返す.
  - ullet (iii) においてターゲットの  $X_A$  も  $X_A$  と同様にブローアップして得られるものであることに注意する.そうでなければ普通の不確定性解消であり,必ず有限回で終わるが,同型写像や代数的に安定な写像は得られない.

#### ブローアップ

- アファイン平面  $\mathbb{C}^2$  (より一般には複素 2 次元ザリスキ開集合) の点  $P: (x,y) = (x_0,y_0)$  でのブローアップとは,アファイン平面から P を除いて代わりに射影直線  $\mathbb{P}^1$  を埋め込む代数的な操作.
- 得られる曲面 U は、

$$U_1: (u_1, v_1), \qquad U_2: (u_2, v_2)$$
  
貼り合わせ: $u_2 = \frac{1}{v_1}, \ v_2 = u_1 v_1 \quad (\text{ for } v_1 \neq 0)$  (8)

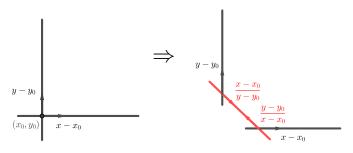
という局所座標系を持ち、写像  $\pi: U \to \mathbb{C}^2$  が

$$(x,y) = (u_1 + x_0, u_1v_1 + y_0) = (u_2v_2 + x_0, v_2 + y_0)$$

によって定まる.

•  $\pi^{-1}: \mathbb{C}^2 \to U$  は  $(u_1, v_1) = \left(x - x_0, \frac{y - y_0}{x - x_0}\right), (u_2, v_2) = \left(\frac{x - x_0}{y - y_0}, y - y_0\right)$  となって正則ではない双有理写像であるが,こちらの表記の方が分かり易い.

#### 例外因子



- 点  $(x-x_0,y-y_0)$  に対応する部分は  $\mathbb{P}^1$  と同型であり、例外因子と呼ばれる.
- 例外因子の線形同値類を  $\mathcal{E}$  とする. ブローアップする前の多様体を X, ブローアップして得られる多様体を  $\tilde{X}$  と書くとき, ピカール群の間に  $\operatorname{Pic}(\tilde{X}) = \operatorname{Pic}(X) \oplus \mathbb{Z}\mathcal{E}$  という関係が成り立つ.
- $\mathbb{P}^1 \times \mathbb{P}^1$  内の直線 x = constant, y = constant の線形同値類をそれぞれ  $\mathfrak{H}_x$ ,  $\mathfrak{H}_y$  と書くとき, $\text{Pic}(\mathbb{P}^1 \times \mathbb{P}^1) = \mathbb{Z} \mathfrak{H}_x \oplus \mathbb{Z} \mathfrak{H}_y$ .

## $P_{IV}$ の不確定性解消

 $\mathbb{P}^1 \times \mathbb{P}^1$  の座標近傍系として,

$$U_{00}:(q,p), \quad U_{10}:(Q,p), \quad U_{01}:(q,P), \quad U_{11}:(Q,P)$$
 (9)

(ただし, Q=1/q, P=1/p) をとる.  $\varphi$  は  $U_{00}\to U_{00}$  では不確定点を持たないが,  $U_{01}\to U_{00}$  では,

$$\bar{q} = \frac{-q - a_2P + bqP - q^2P}{qP}, \quad \bar{p} = q$$

となって,点  $P_1:(q,P)=(0,0)$  で  $\bar{q}$  が不確定になる. $\mathbb{P}^1\times\mathbb{P}^1$  を点  $P_1$  でブローアップすると, $U_{01}$  の代わりに,

$$U_{1,1}:(u_{1,1},v_{1,1})=\left(q,\frac{P}{q}\right), \quad U_{1,2}:(u_{1,2},v_{1,2})=\left(\frac{q}{P},P\right)$$
 (10)

を局所座標とする曲面  $X_{A,1}$  が得られる.

## $P_{\text{IV}}$ の不確定性解消(その2)

•  $\varphi$  は  $U_{1,2} \rightarrow U_{00}$  では,

$$\bar{q} = \frac{-a_2 - u_{1,2} + b u_{1,2} v_{1,2} - u_{1,2}^2 v_{1,2}^2}{u_{1,2} v_{1,2}}, \quad \bar{p} = u_{1,2} v_{1,2}$$

となって,点  $P_2: (u_{1,2}, v_{1,2}) = (-a_2, 0)$ で $\bar{q}$ が不確定になる.  $X_{A,1}$  を点  $P_2$  でブローアップすることにより,曲面  $X_{A,2}$  が得られる.

• 以下同様に (Q, P) = (0, 0) 上の点  $P_3$ ,  $P_4$ ,  $P_5$ ,  $P_6$  および (Q, p) = (0, 0) 上の点  $P_7$ ,  $P_8$  でブローアップすることにより、初期値空間(を構成する曲面) $X_A = X_{A,8}$  を得る.

#### 反標準因子

•  $X_A$  のピカール群( $\simeq H^1(X, \mathbb{O}^*) \simeq H^2(X, \mathbb{Z})$ )は

$$\operatorname{Pic}(X_A) = \mathbb{Z} \, \mathfrak{H}_1 \oplus \mathbb{Z} \, \mathfrak{H}_2 \oplus \bigoplus_{k=1}^8 \mathbb{Z} \, \mathcal{E}_k$$

• 交点形式(内積は可換)

$$\langle \mathcal{H}_i, \mathcal{H}_j \rangle = 1 - \delta_{i,j}, \quad \langle \mathcal{E}_k, \mathcal{H}_j \rangle = 0, \quad \langle \mathcal{E}_k, \mathcal{E}_l \rangle = -\delta_{k,l}$$
 (11)

•  $d \neq 0$  ならば反標準因子  $-K_{X_A}$  の既約分解はただ一つ:

$$-K_{X_A} = D_0 + 2D_1 + 3D_2 + 2D_3 + D_4 + 2D_5 + D_6$$

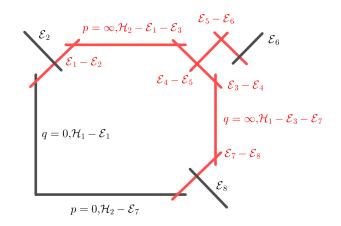
$$D_0 = \mathcal{E}_1 - \mathcal{E}_2, \quad D_1 = \mathcal{H}_2 - \mathcal{E}_1 - \mathcal{E}_3, \quad D_2 = \mathcal{E}_3 - \mathcal{E}_4,$$

$$D_3 = \mathcal{H}_1 - \mathcal{E}_3 - \mathcal{E}_7, \quad D_4 = \mathcal{E}_7 - \mathcal{E}_8,$$

$$D_5 = \mathcal{E}_4 - \mathcal{E}_5, \quad D_6 = \mathcal{E}_5 - \mathcal{E}_6$$
(12)

• d = 0 のときは1パラメーターの既約分解を持ち、そのうち generic なものは非特異楕円曲線となる。

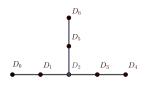
## $P_{\text{IV}}$ の初期値空間



- 氏₁ ε₁ などは各既約因子の線形同値類を表す.
- 赤い線は反標準因子の既約分解の台であり、ちょうど垂直葉と呼ばれる微分 方程式の解が通らない集合になっている。

#### クレモナ等長変換

• 既約因子  $D_i$  たちの交点数は  $E_6^{(1)}$  型のディンキン図形で表される.



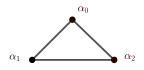
ただし、頂点は自己交点数が-2であることを表し、辺は交点数が1であることを表す。

- - (i) s は交点形式を保つ.
  - (ii) s は反標準因子の既約分解を保つ.
  - (iii) s は有効因子類の成す半群(錐)を保つ.
- *s* が曲面の双有理自己同型の引き戻し(あるいは押し出し)というだけでは これらの性質は満たされないが, 自己同型の引き戻し(あるいは押し出 し)であれば満たされる.

#### ルート系

• 交点形式に関して  $\langle D_0, D_1, \dots, D_6 \rangle$  と直交する  $\mathrm{Pic}(X_A)$  の元全体は以下で生成される.

$$\begin{split} &\alpha_0 = \mathcal{H}_1 + \mathcal{H}_2 - \mathcal{E}_3 - \mathcal{E}_4 - \mathcal{E}_5 - \mathcal{E}_6, \\ &\alpha_1 = \mathcal{H}_1 - \mathcal{E}_1 - \mathcal{E}_2, \\ &\alpha_2 = \mathcal{H}_2 - \mathcal{E}_7 - \mathcal{E}_8 \end{split}$$



• これらの生成元に対応して初期値空間  $\{X_A \mid A \in \mathbb{C}^4\}$  の同型写像  $w_i$  であって, $D \in \operatorname{Pic}(X_A)$  への作用が

$$w_i^*(D) = D + \langle D, \alpha_i \rangle \alpha_i, \tag{13}$$

となるものがただ一つ存在する.

- $w_i$  たちは  $A_2^{(1)}$  型アファインワイル群を生成する.
- $w_i$  以外に  $A_2^{(1)}$  型ディンキン図形の自己同型もクレモナ等長変換となる.

## 目次

- イントロダクション
- ② 2次元の例
- 高次元の場合の用語と基本性質
- 高次元の例

## 高次元の場合の用語と基本的性質

#### ブローアップ

•  $\mathbb{C}^N$  内の開集合 U の (N-k) 次元  $(k \ge 2)$  の部分多様体 V:

$$\{(x_1,\ldots,x_n)\in U\mid x_1-h_1(x_{k+1},\ldots x_N)=\cdots=x_k-h_k(x_{k+1},\ldots x_N)=0\}$$

 $(h_1,\ldots,h_k$  は正則関数)に対し、U の V でのブローアップ  $\pi:\{U_i\}_{i=1,\ldots,k}\to U$  の逆写像  $\pi^{-1}:U\to U_i$  は

$$(x_1,\ldots,x_N)\mapsto$$

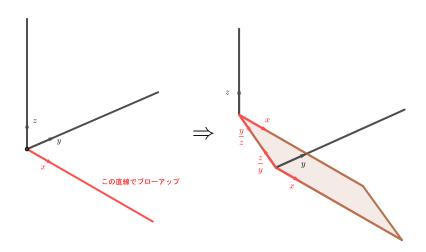
$$\left(\frac{x_1-h_1}{x_i-h_i},\ldots,\frac{x_{i-1}-h_{i-1}}{x_i-h_i},x_i-h_i,\frac{x_{i+1}-h_{i+1}}{x_i-h_i},\ldots,\frac{x_k-h_k}{x_i-h_i},x_{k+1},\ldots x_N\right).$$
(14)

で与えられる.

• 例外因子 E は  $U_i$  上では  $u_i = 0$  で与えられ, $V \times \mathbb{P}^{k-1}$  と同型である.ここで現れる  $\mathbb{P}^{k-1}$  を例外因子のファイバーという.

# ブローアップの図

 $\mathbb{C}^3$  内の直線 y = z = 0 でブローアップ



## 引き戻しと押し出し

- $\mathfrak{X}$ ,  $y \in \mathbb{N}$  次元の非特異射影的代数多様体とし, $f: \mathfrak{X} \to y$  を支配的  $^1$  な有理写像とする.
- 特異点解消定理により、不確定集合 I(f) に含まれる部分多様体に沿うブローアップの列 $\pi: \tilde{X} \to X$  であって、f の持ち上げ  $\tilde{f}: \tilde{X} \to Y$  が正則写像になるものをとる.
- $\mathfrak{X}$  の部分多様体 V に対して  $f_c(V) := \tilde{f} \circ \pi^{-1}(V)$  を V の押し出しといい, $\mathfrak{Y}$  の部分多様体 W に対して  $f_c^{-1}(W) := \pi \circ \tilde{f}^{-1}(W)$  を W の引き戻しという  $^2$ .
- 押し戻しおよび引き戻しを因子群に制限したものをそれぞれ  $f_*: \mathrm{Div}(\mathfrak{X}) \to \mathrm{Div}(\mathfrak{Y})$  および  $f^*: \mathrm{Div}(\mathfrak{Y}) \to \mathrm{Div}(\mathfrak{X})$  と書く. ただし、(複素) (N-2) 次元以下の部分多様体は零因子として無視する.
- 特に f が双有理写像の場合は  $f_* = (f^{-1})^*$  および  $f^* = (f^{-1})_*$  が成り立つ.

<sup>&</sup>lt;sup>1</sup>y の generic な点が f の像に属す.

## 代数的安定性

 $\mathfrak{X}_n$   $(n\in\mathbb{Z})$  を非特異代数多様体とする. 双有理写像の列  $\varphi_n:\mathfrak{X}_n\to\mathfrak{X}_{n+1}$  が任意の整数 n および  $k\geq 1$  について

$$(\varphi_{n+k-1}\circ\cdots\circ\varphi_{n+1}\circ\varphi_n)^*=\varphi_n^*\circ\varphi_{n+1}^*\circ\cdots\circ\varphi_{n+k-1}^*:\operatorname{Pic}(\mathfrak{X}_{n+k})\to\operatorname{Pic}(\mathfrak{X}_n)$$

を満たすとき,代数的に安定であるという.

## Proposition 1 (Bedford-Kim 2008, Bayraktar 2013)

双有理写像の列  $\varphi_n: \mathcal{X}_n \to \mathcal{X}_{n+1}$  が代数的に安定であることと,任意の整数 n および  $k \geq 1$  に対して,

$$\varphi(D \setminus I(\varphi_{n-1})) \subset I(\varphi_{n+k-1} \circ \cdots \circ \varphi_{n+1} \circ \varphi_n)$$

を満たす  $\mathfrak{X}_{n-1}$  上の因子 D が存在しないことは同値である.

なお、与えられた多様体  $\mathfrak X$  の双有理自己同型写像に対し、それが代数的に安定な双有理写像に持ち上げられるかという問題は正しいと予想されるが未解決である(2 次元のケーラー多様体の場合は [Diller-Favre 2001] により正しいことが示されている).

## ネロン・セヴェリ双対格子と擬同型写像

- 非特異代数多様体  $\mathfrak{X}$  に対し、 $N^1(\mathfrak{X}) = \operatorname{Pic}(\mathfrak{X})/\operatorname{Pic}^0(\mathfrak{X}) \subset H^2(\mathfrak{X},\mathbb{Z})$ (ただし、 $\operatorname{Pic}^0(\mathfrak{X})$  はピカール群の連結成分)をネロン・セヴェリ格子といい、ネロン・セヴェリ格子とそのポアンカレ双対  $N_1(\mathfrak{X}) \subset H_2(\mathfrak{X},\mathbb{Z})$  の組をネロン・セヴェリ双対格子という.
- 特に $\mathfrak{X}$  が射影的有理多様体の場合は $N^1(\mathfrak{X}) = \operatorname{Pic}(\mathfrak{X}) = H^2(\mathfrak{X}, \mathbb{Z})$  および $N_1(\mathfrak{X}) = H_2(\mathfrak{X}, \mathbb{Z})$  が成り立つ.
- 双有理写像  $\varphi: \mathfrak{X} \to \mathfrak{Y}$  が有限個の余次元 2 以上の部分多様体を除いて同型なとき,擬同型写像であるという  $^3$ .
- $\bullet$   $\varphi$  が擬同型写像ならば、 $\varphi$  および  $\varphi^{-1}$  は代数的に安定である.

## Proposition 2 (Dolgachev-Ortland 1988)

非特異代数多様体  $\mathfrak{X}$ 、  $\mathfrak{Y}$  に対し,擬同型双有理写像  $\varphi:\mathfrak{X}\to\mathfrak{Y}$  はネロン・セヴェリ双対格子およびその上の交点形式を保つ.

<sup>&</sup>lt;sup>3</sup>したがって擬同型写像は写像とは限らない.このことを強調したい場合は擬同型双有理写像とい

## ネロン・セヴェリ双対格子の生成元

•  $\mathfrak{X}$  を  $(\mathbb{P}^1)^N$  から K 回のブローアップでできた有理多様体とし、

$$(\mathbf{x}_1,\mathbf{x}_2,\ldots,\mathbf{x}_N)=(x_{10}:x_{11},\ x_{20}:x_{21},\ \cdots,\ x_{N0}:x_{N1})$$

を  $(\mathbb{P}^1)^N$  の斉次座標とする.

- 超平面  $\mathbf{c}_i \mathbf{x}_i = c_{i0} \mathbf{x}_{i0} + c_{i1} \mathbf{x}_{i1} = 0$  の全変換に対応する因子類を  $\mathfrak{R}_i$ , k 回目 のブローアップの例外因子の全変換のクラスを  $\mathcal{E}_k$  と書く.
- 直線  $\{\mathbf{x} \mid (x_{j0}: x_{j1}) = (c_{j0}: c_{j1}) \quad (j \neq i) \}$  の全変換のクラスを  $h_i$ , k 回目の ブローアップにおける例外因子のファイバー内の直線の全変換のクラスを  $e_k$  と書く.

このとき、ネロン・セヴェリ双対格子( $\simeq H^2(\mathfrak{X},\mathbb{Z}) \times H_2(\mathfrak{X},\mathbb{Z})$ )は

$$H^{2}(\mathfrak{X},\mathbb{Z}) = \bigoplus_{i=1}^{n} \mathbb{Z} \,\mathfrak{H}_{i} \oplus \bigoplus_{k=1}^{K} \mathbb{Z} \,\mathcal{E}_{k}, \quad H_{2}(\mathfrak{X},\mathbb{Z}) = \bigoplus_{i=1}^{n} \mathbb{Z} \,h_{i} \oplus \bigoplus_{k=1}^{K} \mathbb{Z} \,e_{k}$$
 (15)

という格子になり, 交点形式は

$$\langle \mathfrak{H}_i, h_j \rangle = \delta_{ij}, \quad \langle \mathcal{E}_k, e_l \rangle = -\delta_{kl}, \quad \langle \mathfrak{H}_i, e_k \rangle = 0, \quad \langle \mathcal{E}_k, h_i \rangle = 0.$$
 (16)

となる [津田・竹縄 2009].

#### 反標準因子・ネロン・セヴェリ双対格子への作用

• 前ページの状況の下で反標準因子の線形同値類は

$$-K_{\mathcal{X}} = \sum_{i=1}^{n} 2 \mathcal{H}_{i} - \sum_{k=1}^{K} (N - d_{k} - 1) \mathcal{E}_{k}$$
 (17)

• 擬同型双有理写像  $\varphi: \mathfrak{X} \to \mathfrak{Y}$  に対して,A,B をそれぞれ基底 (15) に関する  $\varphi_*: H^2(\mathfrak{X}, \mathbb{Z}) \to H^2(\mathfrak{Y}, \mathbb{Z})$  および  $\varphi_*: H_2(\mathfrak{X}, \mathbb{Z}) \to H_2(\mathfrak{Y}, \mathbb{Z})$  の表現行列とする. このとき,任意の  $\mathbf{f} \in H^2(\mathfrak{X}, \mathbb{Z})$ , $\mathbf{g} \in H_2(\mathfrak{Y}, \mathbb{Z})$  に対して

$$\mathbf{f}^T J \mathbf{g} = \langle \mathbf{f}, \mathbf{g} \rangle = \langle A \mathbf{f}, B \mathbf{g} \rangle = \mathbf{f}^T A^T J B \mathbf{g}, \quad J = \begin{bmatrix} I_N & 0 \\ 0 & -I_K \end{bmatrix}$$

が成り立つことから, B は A により

$$B = J(A^{-1})^T J, (18)$$

と計算できる.

## 目次

- イントロダクション
- ② 2次元の例
- 3 高次元の場合の用語と基本性質
- 高次元の例

## 初期値空間とルート系の例

#### **1.** $P_{\text{IV}}$ の直積(ほとんどトリビアルな例)

第 4 パンルヴェ方程式  $P_{\mathrm{IV}}$  のハミルトニアン  $H_{\mathrm{IV}}(2)$  を用いて定まる

$$\begin{split} H_1 = & H_{\text{IV}}(-q_1, p_1; a_1^{(1)}, a_2^{(1)}; b^{(1)}) = q_1 p_1 (q_1 + p_1 - b^{(1)}) - a_1^{(1)} q_1 + a_2^{(1)} p_1 \\ H_2 = & H_{\text{IV}}(-q_2, p_2; a_1^{(2)}, a_2^{(2)}; b^{(2)}) = p_2 q_2 (p_2 + q_2 - b^{(2)}) - a_1^{(2)} q_2 + a_2^{(2)} p_2, \end{split}$$

に関する正準方程式

$$\frac{dq_1}{dt} = \frac{\partial H_i}{\partial p_1}, \quad \frac{dp_1}{dt} = -\frac{\partial H_i}{\partial q_1}, \qquad \frac{dq_2}{dt} = \frac{\partial H_i}{\partial p_2}, \quad \frac{dp_2}{dt} = -\frac{\partial H_i}{\partial q_2}$$
(19)

$$\frac{db^{(j)}}{dt} = \begin{cases} \lambda^{(j)} := a_0^{(j)} + a_1^{(j)} + a_2^{(j)} & (i = j \ \mathcal{O} \ \succeq \ ) \\ 0 & (i \neq j \ \mathcal{O} \ \succeq \ ) \end{cases}$$
(20)

(i,j=1,2) を考える. これは  $P_{\mathrm{IV}}$  の直積である  $^4$ .

 $<sup>^{4}</sup>b^{(1)}$ ,  $b^{(2)}$  を 2 つの独立変数とみなせる.

## $P_{\text{IV}}$ の直積の初期値空間

• ベックルンド変換:

$$\left(q_{1}, \mathbf{p}_{1}, q_{2}, \mathbf{p}_{2}; a_{0}^{(1)}, a_{1}^{(1)}, a_{2}^{(1)}, a_{0}^{(2)}, a_{1}^{(2)}, a_{2}^{(2)}; b^{(1)}, b^{(2)}\right) 
\mapsto \left(-p_{2} - q_{2} + b^{(2)} - \frac{a_{2}^{(2)}}{q_{2}}, q_{1}, -q_{1} - p_{1} + b^{(1)} - \frac{a_{2}^{(1)}}{q_{1}}, q_{2}; \right.$$

$$\left. a_{1}^{(2)} + a_{2}^{(2)}, -a_{2}^{(2)}, a_{0}^{(2)} + a_{2}^{(2)}, a_{1}^{(1)} + a_{2}^{(1)}, -a_{2}^{(1)}, a_{0}^{(1)} + a_{2}^{(1)}; b^{(2)}, b^{(1)}\right)$$

● 初期値空間は第2節で構成した P<sub>IV</sub> の初期値空間

の構成において、点  $P_k$   $(k=1,\ldots,8)$  でのブローアップを  $P_k \times (\mathbb{P}^1 \times \mathbb{P}^1)$  および  $(\mathbb{P}^1 \times \mathbb{P}^1) \times P_k$  で置き換えたものになる. [Carstea-Takenawa 2019]

- $\bullet$  ( $\mathbb{P}^1$ ) $^4$  から 2 次元の部分多様体に沿って 16 回ブローアップしたもの.
- その際, どちらを先にブローアップするかにより異なる多様体となるが, それらは互いに擬同型になるので, 問題とはならない.

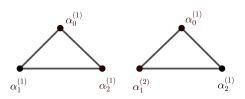
## $P_{\rm IV}$ の初期値空間の対称性

反標準因子は

$$-K_{X_A} = \sum_{i=1}^{2} \left( D_0^{(i)} + 2D_1^{(i)} + 3D_2^{(i)} + 2D_3^{(i)} + D_4^{(i)} + 2D_5^{(i)} + D_6^{(i)} \right)$$
(22)

という形の既約分解を持つ.

• クレモナ等長変換(定義は2次元のときと同じ)として, $A_2^{(1)}$ 型アファイン ワイル群の直積をディンキン図形の自己同型で拡大した  $\operatorname{Aut}(A_2^{(1)}+A_2^{(1)})\ltimes (W(A_2^{(1)})\times W(A_2^{(1)}))$  がとれ,擬同型写像を用いて実現 できる.



## $P_{\text{IV}}: ルート系$

• ルート:

$$\alpha_0^{(1)} = \mathcal{H}_{q_1} + \mathcal{H}_{p_1} - \mathcal{E}_{1,2,3,4}, \qquad \alpha_1^{(1)} = \mathcal{H}_{p_1} - \mathcal{E}_{5,6}, \qquad \alpha_2^{(1)} = \mathcal{H}_{q_1} - \mathcal{E}_{7,8},$$
  $\alpha_0^{(2)} = \mathcal{H}_{p_2} + \mathcal{H}_{q_2} - \mathcal{E}_{9,10,11,12}, \quad \alpha_1^{(2)} = \mathcal{H}_{p_2} - \mathcal{E}_{13,14}, \quad \alpha_2^{(2)} = \mathcal{H}_{q_2} - \mathcal{E}_{15,16}$  ただし、 $\mathcal{E}_{1,2,3,4}$  などは ( $\mathcal{E}_1 + \mathcal{E}_2 + \mathcal{E}_3 + \mathcal{E}_4$ ) などの略.

• コルート:

$$\check{\alpha}_{0}^{(1)} = h_{q_{1}} + h_{p_{1}} - e_{1,2,3,4}, \qquad \check{\alpha}_{1}^{(1)} = h_{q_{1}} - e_{5,6}, \qquad \check{\alpha}_{2}^{(1)} = h_{p_{1}} - e_{7,8}, 
 \check{\alpha}_{0}^{(2)} = h_{q_{2}} + h_{p_{2}} - e_{9,10,11,12}, \qquad \check{\alpha}_{1}^{(2)} = h_{q_{2}} - e_{13,14}, \qquad \check{\alpha}_{2}^{(2)} = h_{p_{2}} - e_{15,16}$$

• 各ルートにワイル群の生成元  $w_i^{(j)}$  が対応し, $D \in N^1(X_A)$ , $d \in N_1(X_A)$  に対して

$$\left(w_{i}^{(j)}\right)^{*}(D) = D + \langle D, \check{\alpha}_{i}^{(j)} \rangle \alpha_{i}^{(j)}, \quad \left(w_{i}^{(j)}\right)^{*}(d) = d + \langle \alpha_{i}^{(j)}, d \rangle \check{\alpha}_{i}^{(j)} \quad (23)$$

で与えられる.

## 2. 野海・山田の *A*<sup>(5)</sup> 型パンルヴェ系

第 V パンルヴェ方程式のハミルトニアン [岡本 1980]

$$H_{V}(q, p; \alpha, \beta, \gamma; s, t) = pq(p + t)(q - s) + \alpha tq + \beta sp + \gamma pq$$

を用いて定まる

$$H = H_{V}(q_{1}, p_{1}; a_{5}, a_{4}, -\frac{1}{2}(a_{0} + a_{2} + a_{4} - a_{1} - a_{3} - a_{5}); b_{1}, -b_{2})$$

$$+ H_{V}(q_{2}, p_{2}; a_{2}, a_{1}, \frac{1}{2}(a_{0} + a_{2} + a_{4} - a_{1} - a_{3} - a_{5}); b_{2}, -b_{1}) - 2q_{1}p_{1}q_{2}p_{2},$$

に関する正準方程式

$$\frac{dq_1}{dt} = \frac{\partial H}{\partial p_1}, \quad \frac{dp_1}{dt} = -\frac{\partial H}{\partial q_1}, \qquad \frac{dq_2}{dt} = \frac{\partial H}{\partial p_2}, \quad \frac{dp_2}{dt} = -\frac{\partial H}{\partial q_2}$$

$$\frac{db_j}{dt} = \frac{1}{2}\lambda b_j = \frac{1}{2}(a_0 + a_1 + \dots + a_5)b_j, \quad (j = 1, 2)$$

を考える. これは野海・山田(1998)の  $A_5^{(1)}$  型パンルヴェ系を少し書き換えた方程式である [笹野・山田 2007].

## **A**<sup>(5)</sup> 型パンルヴェ系の初期値空間

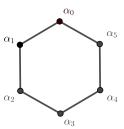
• ベックルンド変換:

$$(q_{1}, p_{1}, q_{2}, p_{2}; a_{0}, a_{1}, a_{2}, a_{3}, a_{4}, a_{5}; b_{1}, b_{2})$$

$$\mapsto \left(-q_{1} - p_{2} + b_{1} + \frac{a_{1}}{q_{2}}, q_{2}, -q_{2} - p_{1} + b_{2} + \frac{a_{4}}{q_{1}}, q_{1}; \right. (24)$$

$$a_{1} + a_{2}, a_{3} + a_{4}, -a_{4}, a_{4} + a_{5}, a_{0} + a_{1}, -a_{1}; b_{1}, b_{2}),$$

- 初期値空間は  $P_{\mathrm{IV}}$  の直積と同様に  $(\mathbb{P}^1)^4$  から 2 次元の部分多様体を中心とする 16 回のブローアップで作れる. [Carstea-Takenawa 2019]
- 反標準因子の既約分解は (22) と同じ.
- クレモナ等長変換として  $\operatorname{Aut}(A_5^{(1)})\ltimes (W(A_5^{(1)})$  がとれる. (これで全てとは主張していない.)



#### 3. 4次元藤・鈴木・津田系

第6パンルヴェ方程式のハミルトニアン [岡本 1980]

$$H_{VI}(q, p; a, b, c, d) = q(q - 1)(q - t)p^{2} - \{(a - 1)q(q - 1) + bq(q - t) + c(q - 1)(q - t)\}p + dq$$
 (25)

を用いて定まる

$$t(t-1)H = H_{VI}(q_1, p_1; a_2, a_0 + a_4, a_3 + a_5 - \eta, \eta a_1)$$

$$+ H_{VI}(q_2, p_2; a_0 + a_2, a_4, a_1 + a_3 - \eta, \eta a_5)$$

$$+ (q_1 - t)(q_2 - 1)\{(q_1p_1 + a_1)p_2 + p_1(p_2q_2 + a_5)\}$$
(26)

(ただし、 $a_0 + a_1 + \cdots + a_5 = 1$ ) に関する正準方程式

$$\frac{dq_i}{dt} = \frac{\partial H}{\partial p_i}, \quad \frac{dp_i}{dt} = -\frac{\partial H}{\partial q_i}, \quad (i = 1, 2)$$
 (27)

を 4 次元の藤・鈴木・津田系という [藤・鈴木 2010, 鈴木 2013, 津田 2014].

#### 4次元藤・鈴木・津田系の初期値空間

- 4次元の藤・鈴木・津田系は  $A_5^{(1)}$  型のベックルンド変換対称性を持つことが知られている.
- Schlesinger 型の線形常微分方程式系の分類による 4 次元パンルヴェ系の退化図式 [川上・中村・坂井 2018, 坂井 2018] によると,この方程式系は退化図式の頂点に位置する 4 つの方程式のうちの一つで,他の 3 つはガルニエ系と笹野系 [笹野 2008] と「行列パンルヴェ系」である.
- $\bullet$   $(q_1, q_2, q_1p_1, q_2p_2)$  を局所座標とする  $(\mathbb{P}^1)^4$  から,2 次元の部分多様体で 8 回,1 次元の部分多様体で 4 回ブローアップすることにより,初期値空間が構成できる. [竹縄 2020]
- クレモナ等長変換として  $Aut(A_5^{(1)}) \ltimes W(A_5^{(1)})$  (から一つのディンキン図形 の自己同型を除いたもの) がとれ、知られていたベックルンド変換群と一つ の生成元を除き一致する.
- 例外となる生成元はコンパクトな初期値空間を保たないが、微分方程式の初期値空間は保つ.

#### 4. 4次元ガルニエ系

4次元ガルニエ系は5点の確定特異点を持つフックス型微分方程式からモノドロミー保存変形により導かれる微分方程式であり、正準方程式

$$\frac{dq_1}{dt_i} = \frac{\partial H_i}{\partial p_1}, \quad \frac{dp_1}{dt_i} = -\frac{\partial H_i}{\partial q_1}, \qquad \frac{dq_2}{dt_i} = \frac{\partial H_i}{\partial p_2}, \quad \frac{dp_2}{dt_i} = -\frac{\partial H_i}{\partial q_2}$$
(28)

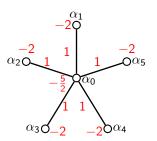
の形で書かれる.

- ガルニエ系のベックルンド変換を調べることにより、 $(q_1, q_2, q_1p_1, q_2p_2)$ を 局所座標とする  $(\mathbb{P}^2)^2$  から,2 次元の部分多様体で8 回,1 次元の部分多様体で2 回ブローアップすることにより,初期値空間が構成できる.
- これは [木村 1993] の結果とほぼ同様である.
- クレモナ等長変換としては5つの鏡英変換と、一つのルート系の平行移動で 生成される群が得られるが、知られているベックルンド変換の生成元うちーつ (津田 2003) はコンパクトな初期値空間を保たない。

## 4次元ガルニエ方程式のルート系

•  $\nu - \nu = \alpha_i \ (i = 0, 1, ..., 5)$ 

$$\begin{array}{ll} \alpha_0 = \frac{1}{2} (\mathcal{H}_1 + 2\,\mathcal{H}_2 - 2\,\mathcal{E}_1 - 2\,\mathcal{E}_3 - 2\,\mathcal{E}_5), & \alpha_1 = \mathcal{H}_1 - \mathcal{E}_9 - \mathcal{E}_{10} \\ \alpha_2 = \mathcal{H}_1 - \mathcal{E}_7 - \mathcal{E}_8, & \alpha_3 = \mathcal{E}_5 - \mathcal{E}_6 \\ \alpha_4 = \mathcal{E}_1 - \mathcal{E}_2, & \alpha_5 = \mathcal{E}_3 - \mathcal{E}_4 \end{array}$$



•  $\alpha_0$  に対応する鏡英変換は作れないが、 $\alpha_0$  に対応する平行移動は作れる.

#### 5. q-差分系

- 高次元の q-差分系はクラスター代数と関係していると考えられ、最近注目 されている.
- 2次元のときの結果を踏まえると、初期値空間の構成は q-差分系の場合の方 が微分系の場合よりもむしろ扱いやすいと考えられるが、*q*-差分系の初期値 空間の研究はまだ少ない.
- 報告者と津田氏との共同研究(2009)で扱った初期値空間は  $(\mathbb{P}^1)^N$  内の異 なる (N-2) 次元部分多様体を中心にブローアップしてできるものであり、 2次元でいうと q-差分第6パンルヴェ方程式と同様に、例外因子同士が包含 関係にはないような簡単な状況である.
- この論文で提案した D型アファインワイル群の一つの平行移動を q-差分方 程式とみなして退化させることにより、笹野の D 型パンルヴェ系 [笹野 2008] が導けることが [増田 2015] により示されている.

## 6. 初期値空間が構成できない場合

- 格子スーパー KdV の簡約から得られる 4 次元の自励的な離散力学系については、初期値空間は構成できないが、代数的に安定な双有理写像への持ち上げは可能である。また、この力学系の次数の増大度が 2 次である [Carstea-Takenawa 2020].
- パンルヴェ系と考えられているが、初期値空間の構成がうまくいかない例もある [論文準備中].

#### まとめ

- いくつかの高次元のパンルヴェ系に対し、離散対称性を利用して初期値空間 を作ることができた.
- 今のところ構成したルート系が初期値空間の対称性全体になっているかどう かは分からない。2次元ホモロジーの保存量がよく分からない。
- 離散方程式の場合も同様に作れそう.
- 逆に初期値異空間の構成から出発して力学系を作る方がよりスマートなア プローチと考えられるが、まだあまり進んでいない。