

L Lagrange 解答例

$$1 \quad f(x, y, z) = 1 + x^2 - y + 2xy + y^3 - 2z + 2yz + z^2$$

$$f_x = 2x + 2y \quad \dots (1)$$

$$f_y = -1 + 2x + 3y^2 + 2z \quad \dots (2)$$

$$f_z = -2 + 2y + 2z \quad \dots (3)$$

$$f_x = f_y = f_z = 0 \quad \text{と解るのは}$$

$$(1) (3) \text{ より } y = -x, \quad z = x + 1 \quad \text{と解るのは} \quad (2) \text{ に代入して}$$

$$x = -1, -\frac{1}{3}$$

$$\therefore (-1, 1, 0), \left(-\frac{1}{3}, \frac{1}{3}, \frac{2}{3}\right)$$

$$\wedge \text{, 行列は } H = \begin{bmatrix} 2 & 2 & 0 \\ 2 & 6y & 2 \\ 0 & 2 & 2 \end{bmatrix}$$

$$\bullet (-1, 1, 0) \text{ のとき } H = \begin{bmatrix} 2 & 2 & 0 \\ 2 & 6 & 2 \\ 0 & 2 & 2 \end{bmatrix}$$

$$H \text{ の固有値は } \begin{vmatrix} \lambda - 2 & -2 & 0 \\ -2 & \lambda - 6 & -2 \\ 0 & -2 & \lambda - 2 \end{vmatrix} = 0 \text{ より}$$

$$\lambda = 2, 4 \pm 2\sqrt{3} \quad (\text{全て正})$$

極小値 $f(-1, 1, 0) = 0$ をとる.

$$\bullet \left(-\frac{1}{3}, \frac{1}{3}, \frac{2}{3}\right) \text{ のとき } H = \begin{bmatrix} 2 & 2 & 0 \\ 2 & 2 & 2 \\ 0 & 2 & 2 \end{bmatrix}$$

$$\text{固有値は } \begin{vmatrix} \lambda - 2 & -2 & 0 \\ -2 & \lambda - 2 & -2 \\ 0 & -2 & \lambda - 2 \end{vmatrix} = 0 \text{ より}$$

$$\lambda = 2, 2 \pm 2\sqrt{2} \quad (\text{不定値})$$

よって極値をとらない.