# 第3章　線形計画

## 3.1　単体法

### 3.1.1　はじめに

$$
\left\|
\begin{array}{llcrrrcll}
\text{最小化} & z & = & -x_1 & -2x_2 & -2x_3 & & & \\
\text{制約条件} & & 12 & -2x_1 & -x_2 & & \geq & 0 & (1) \\
 & & 12 & -x_1 & -2x_2 & & \geq & 0 & (2) \\
 & & 16 & -x_1 & -x_2 & -2x_3 & \geq & 0 & (3) \\
 & & & x_1 & & & \geq & 0 & (4) \\
 & & & & x_2 & & \geq & 0 & (5) \\
 & & & & & x_3 & \geq & 0 & (6)
\end{array}
\right.
$$

を考える (図 1)．$(1-6)$ を満たす点を**許容解**という（図 3.1 参照）
.

線形計画法の（解は存在すれば）必ず頂点になる．制約条件を満たす頂点 (例えば $P_0(0,0,0)$) から始めて目的関数が小さくなるように辺をたどって行くといつかは最小解にたどり着く．この考え方に基づいた解法を**単体法**という．

**図による説明**

Step1．$P_0 \to P_1$　始めに $P_0(0,0,0)$ をとる．(4), (5), (6) で "=" となる．

(5), (6) が "=" のまま (4) の条件だけ $x_1 \geq 0$ とすると点 $(x_1, 0, 0)$ は辺 $P_0P_1$ 上を動き $z = -x_1$ は小さくなる．このとき残りの (1),(2),(3) のうち初めて "=" になるのは $x_1 = 6$ のときの (1) である．この (1),(5),(6) が"=" になる点は $P_1(6,0,0)$ である．

Step2．$P_1 \to P_2$　(1), (6) が "=" のまま (5) の条件だけ $x_2 \geq 0$ とすると点 $(6-\frac{1}{2}x_2, x_2, 0)$ は辺 $P_1P_2$ 上を動き $z = -6 - \frac{3}{2}x_2$ は小さくなる．このとき残りの (2),(3),(4) のうち初めて "=" になるのは図より (2) であり，この (1),(2)(,6) が "=" になる点は $P_2(4,4,0)$ である．

Step3．$P_2 \to P_3$　(1), (2) が"=" のまま (6) の条件だけ $x_3 \geq 0$ とすると点 $(4,4,x_3)$ は辺 $P_2P_3$ 上を動き $z = -12 - 2x_3$ は小さくなる．このとき残りの (3),(4),(5) のうち初めて "=" になるのは図より (3) であり，この (1),(2),(3) が "=" になる点は $P_3(4,4,4)$ である．

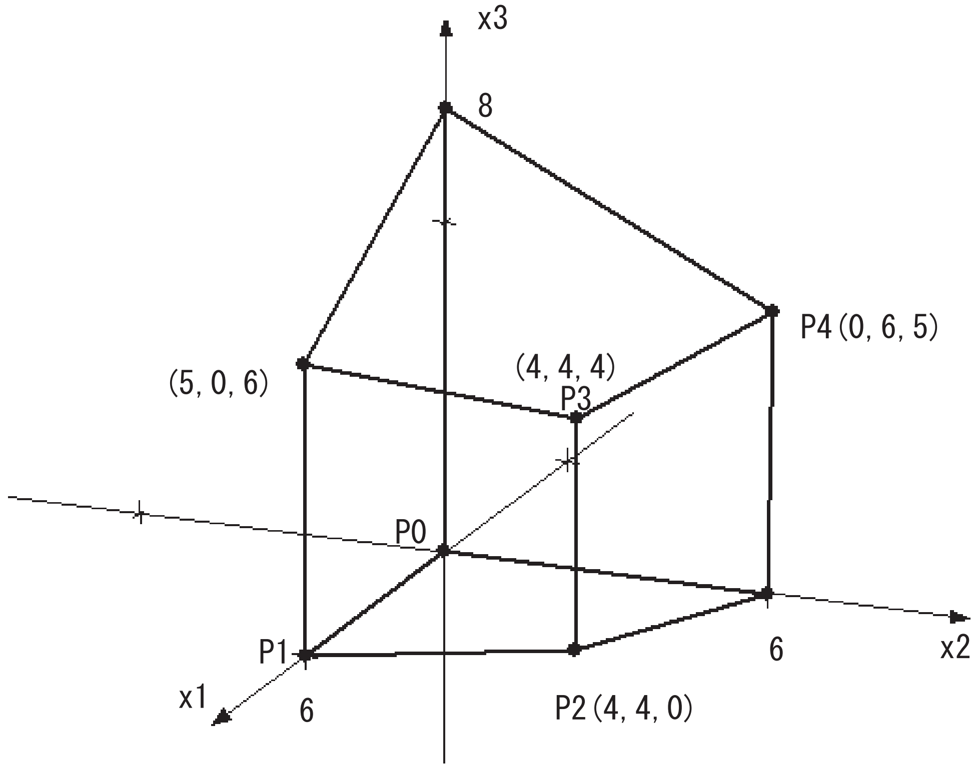


図 3.1: 例題 1

Step4. $P_3 \rightarrow P_4$　(2), (3) が "=" のまま (1) の条件だけ $s = 12 - 2x_1 - x_2 \geq 0$ とすると点 $(4 - \frac{2}{3}s, 4 + \frac{1}{3}s, 4 + \frac{1}{6}s)$ は辺 $P_2P_3$ 上を動き $z = -20 - \frac{1}{3}s$ は小さくなる．このとき残りの (4),(5),(6) のうち初めて "=" になるのは図より (4) であり，この (2),(3),(4) が "=" になる点は $P_4(0, 6, 5)$ である．

Step5　どの隣接する頂点へ移動しても $z$ は大きくなってしまう．よって $P_4(0, 6, 5)$ が最適解 ($z = -22$ が最小値) である．

図が利用できない場合におけるこの解法の問題点

· どの条件を外したとき $z$ が小さくなるかどうかを調べるために，いちいちパラメーターの入った連立方程式を解かなければならない．

· 初めて"=" になる条件がどれかを調べるためにやはり連立方程式を解かなければならない．

次の単体法は本質的に上記の図形を利用した解法と同じ解法であるが，余計な変数 (スラック変数) を導入することでこれらの問題をうまく回避できる．

## 3.2　アルゴリズム

問題を

$$\left\|\begin{array}{lrcll} \text{最小化} & z & = & -x_1-2x_2-2x_3 & \\ \text{制約条件} & x_4 & = & 12-2x_1-x_2 & (1) \\ & x_5 & = & 12-x_1-2x_2 & (2) \\ & x_6 & = & 16-x_1-x_2-2x_3 & (3) \\ & & & x_1,x_2,\cdots,x_6 \ge 0 & \end{array}\right.$$

と書き換える．左辺の変数 $z, x_4, x_5, x_6$ を**基底変数**，右辺の変数 $x_1, x_2, x_3$ を**非基底変数**という．

Step1．$P_0 \to P_1$　$P_0(0,0,0)$ から始める．このとき $z$ における $x_1, x_2, x_3$ の係数は全て負なので，どれを">" にしても $z$ は小さくなる．

$x_1$ のみ "$\ge 0$" とする．(1),(2),(3) のうち初めて "=" になるのは $x_1 = 6$ のときの (1) である．この点は $P_1(6,0,0)$ である．最後に $x_1$ と $x_4$ を入れ変えて，非基底変数を $x_4, x_2, x_3$ とする問題に書き換える (これを**ピボット操作**という).

$$\left\|\begin{array}{lrcll} \text{最小化} & z & = & -6+\frac{1}{2}x_4-\frac{3}{2}x_2-2x_3 & \\ \text{制約条件} & x_1 & = & 6-\frac{1}{2}x_4-\frac{1}{2}x_2 & (1) \\ & x_5 & = & 6+\frac{1}{2}x_4-\frac{3}{2}x_2 & (2) \\ & x_6 & = & 10+\frac{1}{2}x_4-\frac{1}{2}x_2-2x_3 & (3) \\ & & & x_1,x_2,\cdots,x_6 \ge 0 & \end{array}\right.$$

このとき $P_1$ は $(x_4, x_2, x_3) = (0,0,0)$ と書ける．

Step2．$P_1 \to P_2$　step1 と全く同じ．ただし $z$ における $x_4$ の係数は正なので $x_4 > 0$ としても $z$ は小さくならない．そこで $x_2$ のみ "$\ge 0$" とする．(1),(2),(3) のうち初めて"=" になるのは $x_2 = 4$ のときの (2) である．この点は $P_2 : (x_4, x_2, x_3) = (0,4,0)$ である．$x_2$ と $x_5$ を入れ換えて，非基底変数を $x_4, x_5, x_3$ とする問題に書き換える．

$$\left\|\begin{array}{lrcll} \text{最小化} & z & = & -12+x_5-2x_3 & \\ \text{制約条件} & x_1 & = & 4-\frac{2}{3}x_4+\frac{1}{3}x_5 & (1) \\ & x_2 & = & 4+\frac{1}{3}x_4-\frac{2}{3}x_5 & (2) \\ & x_6 & = & 8+\frac{1}{3}x_4+\frac{1}{3}x_5-2x_3 & (3) \\ & & & x_1,x_2,\cdots,x_6 \ge 0 & \end{array}\right.$$

このとき $P_2$ は $(x_4, x_5, x_3) = (0,0,0)$ と書ける．

Step3．$P_2 \to P_3$　$x_3$ のみ "$\ge 0$" とする．(1),(2),(3) のうち初めて"=" になるのは $x_3 = 4$ のときの (3) である．

$$
\left\|
\begin{array}{llcl}
\text{最小化} & z & = & -20-\frac{1}{3}x_4+\frac{2}{3}x_5+x_6 \\
\text{制約条件} & x_1 & = & 4-\frac{2}{3}x_4+\frac{1}{3}x_5 \qquad (1) \\
 & x_2 & = & 4+\frac{1}{3}x_4-\frac{2}{3}x_5 \qquad (2) \\
 & x_3 & = & 4+\frac{1}{6}x_4+\frac{1}{6}x_5-\frac{1}{2}x_6 \qquad (3) \\
 & & & x_1,x_2,\cdots,x_6 \geq 0
\end{array}
\right.
$$

と書き換える．このとき $P_3$ は $(x_4,x_5,x_6)=(0,0,0)$ となる．

Step4．$P_3 \to P_4$　$x_4$ のみ "$\geq 0$" とする．(1),(2),(3) のうち初めて"="になるのは $x_4=6$ のときの (1) である．

$$
\left\|
\begin{array}{llcl}
\text{最小化} & z & = & -22+\frac{1}{2}x_1+\frac{1}{2}x_5+x_6 \\
\text{制約条件} & x_4 & = & 6-\frac{3}{2}x_1+\frac{1}{2}x_5 \qquad (1) \\
 & x_2 & = & 6-\frac{1}{2}x_1-\frac{1}{2}x_5 \qquad (2) \\
 & x_3 & = & 5-\frac{1}{4}x_1+\frac{1}{4}x_5-\frac{1}{2}x_6 \qquad (3) \\
 & & & x_1,x_2,\cdots,x_6 \geq 0
\end{array}
\right.
$$

と書き換える．このとき $P_4$ は $(x_1,x_5,x_6)=(0,0,0) \iff (x_1,x_2,x_3)=(0,6,5)$．となる．

Step5　$z$ における $x_1,x_5,x_6$ の係数は全て正なので $z$ がこれ以上小さくなることはないので $P_4$ が最適解である．

残っている問題

· 問題が例題の形と違うとき．→**不等式標準形**に直す.

· 原点が許容解でないとき．→**２段単体法**.

· $z$ における係数が負でも非基底変数を正にできないときがある．→そのままピボット操作.

· そうすると巡回してしまうことがある．→**最小添字規則**を用いる.

· $z$ における係数が負の非基底変数をいくらでも大きくできることがある．→問題は元々非有解 ($z$ をいくらでも小さくできる).

**例題**

1.

$$
\left\|
\begin{array}{llcccccl}
\text{最小化} & z = & & -x_1 & -x_2 & -x_3 & & \\
\text{制約条件} & & 10 & -2x_1 & -x_2 & & \geq & 0 \qquad (1) \\
 & & 12 & -x_1 & -4x_2 & & \geq & 0 \qquad (2) \\
 & & 16 & -x_1 & -2x_2 & -2x_3 & \geq & 0 \qquad (3) \\
 & & & x_1 & & & \geq & 0 \qquad (4) \\
 & & & & x_2 & & \geq & 0 \qquad (5) \\
 & & & & & x_3 & \geq & 0 \qquad (6)
\end{array}
\right.
$$

## 3.3 双対問題

$$\left\| \begin{array}{llrrrrcll} \text{最大化} & z & = & x_1 & +2x_2 & +2x_3 & & & \\ \text{制約条件} & & 12 & -2x_1 & -x_2 & & \geq & 0 & (1) \\ & & 12 & -x_1 & -2x_2 & & \geq & 0 & (2) \\ & & 16 & -x_1 & -x_2 & -2x_3 & \geq & 0 & (3) \\ & & & & & x_i & \geq & 0 & \end{array} \right.$$

を考える．$y_1$，$y_2$，$y_3 \geq 0$ に対して，

$$\begin{aligned} g(x,y) =& x_1 + 2x_2 + 2x_3 + (12 - 2x_1 - x_2)y_1 \\ &+ (12 - x_1 - 2x_2)y_2 + (16 - x_1 - x_2 - 2x_3)y_3 \\ =& 12y_1 + 12y_2 + 16y_3 + x_1(1 - 2y_1 - y_2 - y_3) \\ &+ x_2(2 - y_1 - 2y_2 - y_3) + x_3(2 - 2y_3) \end{aligned}$$

を考えると，任意の $x$，$y$ に対して $z \leq g(x,y)$ であるから

$$\max_x z \leq \max_x g(x,y)$$

が任意の $y$ について成り立ち，従って

$$\max_x z \leq \min_y \max_x g(x,y)$$

が成り立つ．

**注：**ここで左辺は条件 (1)(2)(3) を仮定するが右辺は（より大きくなるだけなので）仮定しなくても良い．

$\max_x g(x,y)$ は

$$\begin{aligned} -1 + 2y_1 + y_2 + y_3 \geq 0 \quad (4) \\ -2 + y_1 + 2y_2 + y_3 \geq 0 \quad (5) \\ -2 + 2y_3 \geq 0 \quad (6) \end{aligned}$$

のとき，$12y_1 + 12y_2 + 16y_3$ であり，それ以外のとき $\infty$ であるから，$\min_y \max_x g(x,y)$ は次の問題の解になる．

$$\left\| \begin{array}{llrrrrcll} \text{最小化} & w & = & 12y_1 & +12y_2 & +16y_3 & & & \\ \text{制約条件} & & -1 & +2y_1 & +y_2 & +y_3 & \geq & 0 & (4) \\ & & -2 & +y_1 & +2y_2 & +y_3 & \geq & 0 & (5) \\ & & -2 & & & +2y_3 & \geq & 0 & (6) \\ & & & & & y_i & \geq & 0 & \end{array} \right.$$

これを双対問題という．

双対問題の双対問題は元の問題になる．また元の問題（主問題という）に最適解が存在するとき，双対問題にも最適解が存在しそれらが一致することが知られている（強双対定理）．

**例題**

$$
\left\|
\begin{array}{llrrrrcll}
\text{最大化} & w = & -12y_1 & -12y_2 & -16y_3 & & & & \\
\text{制約条件} & -1 & +2y_1 & +y_2 & +y_3 & \geq & 0 & & (4) \\
 & -1 & +y_1 & +2y_2 & +y_3 & \geq & 0 & & (5) \\
 & -1 & & & +2y_3 & \geq & 0 & & (6) \\
 & & & & y_i & \geq & 0 & &
\end{array}
\right.
$$

の双対問題を求め，解を求めよ．

## 3.4　残った問題

**不等式標準形**

$$
\left\|
\begin{array}{lrcrcl}
\text{最小化} & c_1x_1 & +\cdots & +c_nx_n & & \\
\text{制約条件} & a_{11}x_1 & +\cdots & +a_{1n}x_n & \geq & b_1 \\
 & & \cdots & & & \\
 & a_{m1}x_1 & +\cdots & +a_{mn}x_n & \geq & b_m \\
 & & & x_j & \geq & 0
\end{array}
\right.
$$

を線形計画問題の不等式標準形と呼ぶ．任意の線形計画問題は次の操作で不等式標準形に書き換えられる．

[等式の不等式への書き換え]

$$\sum_j a_jx_j = b \iff \sum_j a_jx_j \geq b, \quad \sum_j a_jx_j \leq b$$

[$-1$ 倍]

$$z \text{ を最大化} \quad \iff \quad -z \text{ を最小化}$$

$$\sum_j a_jx_j \leq b \iff -\sum_j a_jx_j \geq -b$$

[非負制約への書き換え]

$$x \leq b \quad \iff \quad x \text{ は } x = -x' + b, \;\; x' \geq 0 \text{ と書ける}$$

$$x \text{ 制約なし} \quad \Longleftrightarrow \quad x \text{ は } x = x_1 - x_2,\ \ x_1 \geq 0,\ \ x_2 \geq 0 \text{ と書ける}$$

**例題**

$$\left\|\begin{array}{lrrrcl} \text{最大化} & x & +y & +z & & \\ \text{制約条件} & x & +y & -z & = & 0 \\ & x & +2y & & \leq & 1 \\ & & & x & \leq & 1 \end{array}\right.$$

を不等式標準形に書き換えよ．

**最小添字規則**

　単体法の過程で，例えば

$$\left\|\begin{array}{lrcll} \text{最小化} & z & = & -x_1 + 2x_2 - x_3 & \\ \text{制約条件} & x_4 & = & -2x_1 + x_2 - x_3 & (1) \\ & x_5 & = & -3x_1 - x_2 - x_3 & (2) \\ & x_6 & = & 5x_1 - 3x_2 + 2x_3 & (3) \\ & & & x_1, x_2, \cdots, x_6 \geq 0 & \end{array}\right.$$

となったとする．$(x_1, x_2, x_3) = (0, 0, 0)$ は許容解である．次の段階では，
1. $z$ における係数が負の非基底変数を (今の場合は $x_1$ または $x_3$) を選んで $\geq 0$ とする．
2. $x_1$, $x_3$ のどちらを選んでも動かせないので，基底変数と非基底変数をピボット操作で入れ換えるのだが，このように<u>$z$ の値が変わらないときは循環してしまうことがある</u>．そこで 1，2 それぞれ候補の中で最小の添字のものを選ぶことにする (今の場合は $x_1$ と $x_4$) と循環が避けられる．この方法を最小添字規則という．

**２段単体法**

$$\left\|\begin{array}{lrrrrcll} \text{最小化} & z & = & -x_1 & -x_2 & & & \\ \text{制約条件} & & -1 & +x_1 & +x_2 & \geq & 0 & (1) \\ & & 4 & -2x_1 & -x_2 & \geq & 0 & (2) \\ & & & & x_j & \geq & 0 & \end{array}\right.$$

のように原点が許容解でない場合にはそのままでは単体法が使えない．そこで

$$\left\|\begin{array}{lrrrrrcll} \text{最小化} & z_a & = & & & x_a & & & \\ \text{制約条件} & & -1 & +x_1 & +x_2 & +x_a & \geq & 0 & (1) \\ & & 4 & -2x_1 & -x_2 & +x_a & \geq & 0 & (2) \\ & & & & x_j, & x_a & \geq & 0 & \end{array}\right.$$

$$\Longleftrightarrow \left\| \begin{array}{llll} \text{最小化} & z_a & = & x_a \\ \text{制約条件} & x_3 & = & -1 + x_1 + x_2 + x_a \quad (1) \\ & x_4 & = & 4 - 2x_1 - x_2 + x_a \quad (2) \\ & & x_j \geq 0 & x_a \geq 0 \end{array} \right.$$

という**補助問題**を考える．このとき
· $x_a$ を十分大きくとれば補助問題の許容解が得られ，もともと $z_a \geq 0$ なので補助問題には解が存在する．
· 補助問題の最適値が 0，つまり $z_a = x_a = 0$ とできるとき，元の問題の許容解が得られる．逆に補助問題の最適値が正であれば，どのように $x_1, x_2 \geq 0$ をとっても (1)(2) を満たすようにはできないということであるから，

$$\text{元の問題が実行可能} \Longleftrightarrow \text{補助問題の最適値が } 0$$

が成立する．よって補助問題の解が 0 かどうかで元の問題が実行可能かどうかが分かり，さらに 0 の場合はそのときの $x_1, x_2$ が元の問題の許容解を与える．
具体的なアルゴリズムは頂点を辿るように次のようなピボット操作によって与えられる：
1. 定数部分が最小の基底変数と $x_a$ をピボット操作で入れ換える．

$$\left\| \begin{array}{llll} \text{最小化} & z_a & = & 1 - x_1 - x_2 + x_3 \\ \text{制約条件} & x_a & = & 1 - x_1 - x_2 + x_3 \\ & x_4 & = & 5 - 3x_1 - 2x_2 + x_3 \\ & & x_j \geq 0 & x_a \geq 0 \end{array} \right.$$

2. 単体法で $z_a$ を最小化する．

$$\left\| \begin{array}{llll} \text{最小化} & z_a & = & x_a \\ \text{制約条件} & x_1 & = & 1 - x_a - x_2 + x_3 \\ & x_4 & = & 2 + 3x_a + x_2 - 2x_3 \\ & & x_j \geq 0 & x_a \geq 0 \end{array} \right.$$

これより補助問題の解は 0 と分かる．このとき $x_a = 0$ なので，

$$x_1 = 1 - x_2 + x_3, \quad x_4 = 2 + x_2 - 2x_3$$

となるが，これを元の問題:

$$\left\| \begin{array}{lrcrr} \text{最小化} & z & = & -x_1 & -x_2 \\ \text{制約条件} & x_3 & = & -1 + x_1 & +x_2 \\ & x_4 & = & 4 - 2x_1 & -x_2 \\ & & & x_j \geq 0 & \end{array} \right.$$

に代入することにより，

$$\left\| \begin{array}{llll} \text{最小化} & z & = & -1 - x_3 \\ \text{制約条件} & x_1 & = & 1 - x_2 + x_3 \\ & x_4 & = & 2 + x_2 - 2x_3 \\ & & x_j \geq 0 & \end{array} \right.$$

という原点 $x_2 = x_3 = 0$ を許容解とする線形計画問題を得る．これを解くと

$$\left\| \begin{array}{llll} \text{最小化} & z & = & -2 - \frac{1}{2}x_2 + \frac{1}{2}x_4 \\ \text{制約条件} & x_1 & = & 2 - \frac{1}{2}x_2 + \frac{1}{2}x_4 \\ & x_3 & = & 1 + \frac{1}{2}x_2 - \frac{1}{2}x_4 \\ & & x_j \geq 0 & \end{array} \right.$$

$$\left\| \begin{array}{llll} \text{最小化} & z & = & -4 + x_1 \\ \text{制約条件} & x_2 & = & 4 - 2x_1 + x_4 \\ & x_3 & = & 3 - x_1 \\ & & x_j \geq 0 & \end{array} \right.$$

よって解は $x_1 = 0, x_4 = 0$，すなわち $x_1 = 0, x_2 = 4$ のとき $z = -4$ となる．

このようにして補助問題，元の問題と 2 段階で単体法を用いる解法を 2 段単体法という．