第4章　変分法

4.1　制約なし変分問題

例題1 (最速降下曲線)
xy 平面内の $A(0,a)$ 地点から $B(1,b)$ 地点に至る滑り台をボールが転がる．どのような形の滑り台にすると最も早く B 地点にたどり着くか？ただし $a>b$ であり摩擦は考えないものとする [ヨハン・ベルヌーイ 1696].

滑り台が

$$y=u(x),\quad (0\le x\le 1),\quad u(0)=a,\ u(1)=b$$

と表されているとする．時刻 t で点 $P(x,u(x))$ を通過するときの速度ベクトルは $\dfrac{dx}{dt}(1,u'(x))$ なので，エネルギー保存則より

$$\frac{1}{2}m\left(\frac{dx}{dt}\right)^2\left(1+(u'(x))^2\right)=mg(a-u(x))$$

が成り立つ．よって x 方向の速度は

$$\frac{dx}{dt}=\frac{\sqrt{2g(a-u(x))}}{\sqrt{1+u'(x)^2}}$$

であり，Δx 進むのにかかる時間は

$$\frac{\sqrt{1+u'(x)^2}}{\sqrt{2g(a-u(x))}}\Delta x$$

である．よって x が 0 から 1 まで進むのにかかる時間は

$$\int_0^1\frac{\sqrt{1+u'(x)^2}}{\sqrt{2g(a-u(x))}}dx \tag{4.1}$$

となる．これを

$$u(0)=a,u(1)=b$$

を満たし，区間 $[0,1]$ で連続かつ $(0,1)$ で C^1 級な関数に対して最小化すれば良い．(4.1) により関数 $u(x)$ に対しある実数が対応するが，このようなものを**汎関数**という.

変分問題のオイラー方程式

一般に

$$\int_0^1 F(x, u(x), u'(x))dx \tag{4.2}$$

を許容集合

$$V = \{u \in C^0[0,1] \cap C^1(0,1) \mid u(0) = a, u(1) = b\}$$

で最小化する問題を考える．

関数 $\varphi(x)$ $(0 \le x \le 1)$ を $\varphi(0) = \varphi(1) = 0$ となる任意の滑らかな関数とする．このような関数をテスト関数と呼ぶ．

もし $\overline{u}(x)$ が (4.2) の最小解であるなら，特に

$$u(x) = \overline{u}(x) + \varepsilon\varphi(x)$$

として ε を変化させたときの (4.7) の最小値は $\varepsilon = 0$ のときにとる．よって

$$\frac{\partial}{\partial\varepsilon}\int_0^1 F\bigl(x, \overline{u}(x) + \varepsilon\varphi(x), \overline{u}'(x) + \varepsilon\varphi'(x)\bigr)dx\Big|_{\varepsilon=0} = 0$$

が成り立つ．部分積分を用いると

$$\begin{aligned}
\text{左辺} &= \int_0^1 \bigl\{F_u\bigl(x, u(x), u'(x)\bigr)\varphi(x) + F_{u'}\bigl(x, u(x), u'(x)\bigr)\varphi'(x)\bigr\}\,dx\Big|_{\varepsilon=0} \\
&= \int_0^1 \bigl\{F_u\bigl(x, \overline{u}, \overline{u}'(x)\bigr)\varphi(x) + F_{u'}\bigl(x, \overline{u}, \overline{u}\bigr)\varphi'(x)\bigr\}\,dx \\
&= \int_0^1 F_u\varphi(x)dx + \Bigl[F_{u'}\varphi(x)\Bigr]_0^1 - \int_0^1 \frac{d}{dx}F_{u'}\varphi(x)dx \quad \text{部分積分} \\
&= \int_0^1 \left(F_u - \frac{d}{dx}F_{u'}\right)\varphi(x)dx
\end{aligned}$$

となる．$\varphi(x)$ は任意関数だったので，変分学の基本原理 ($f(x)$ が連続かつ任意関数 $\varphi(x)$ に対して $\displaystyle\int_0^1 f(x)\varphi(x)dx = 0$ ならば $f(x) = 0$) により

$$F_u\bigl(x, \overline{u}(x), \overline{u}'(x)\bigr) - \frac{d}{dx}F_{u'}\bigl(x, \overline{u}(x), \overline{u}'(x)\bigr) \quad = \quad 0$$

となる．つまり $u(x)$ を解とすると，

$$F_u\bigl(x, u(x), u'(x)\bigr) - \frac{d}{dx}F_{u'}\bigl(x, u(x), u'(x)\bigr) \quad = \quad 0 \tag{4.3}$$

が成り立つ．(4.3) をこの変分問題の **Euler 方程式**という．

例題 1 では

$$F(x,u,u') = \frac{\sqrt{1+u'(x)^2}}{\sqrt{2g(a-u(x))}}$$

であった．このように $F(x,u,u')$ が $F(u,u')$ という形をしているときは (4.3) は

$$\frac{d}{dx}\big(F(u,u') - u'F_{u'}(u,u')\big) = 0 \tag{4.4}$$

と簡単になり，$F(u,u') - u'F_{u'}(u,u')$ は定数と分かる．

[証明]

$$\begin{aligned}
(4.4)\text{ の左辺} &= u'F_u + u''F_{u'} - u''F_{u'} - u'u'F_{uu'} - u'u''F_{u'u'} \\
&= u'(F_u - u'F_{uu'} - u''F_{u'u'}) \\
&= u'\left(F_u - \frac{d}{dx}F_{u'}\right) = 0
\end{aligned}$$

□

(4.4) を例題 1 に適用すると，

$$F(u,u') - u'F_{u'}(u,u') = \frac{1}{\sqrt{1+u'(x)^2}\sqrt{2g(a-u(x))}} = k \quad (k \text{ は定数})$$

となるので，

$$(1+u'(x)^2)(a-u(x)) = k \quad (k \text{ はおき直した.})$$

$$u' = \pm\sqrt{\frac{k}{a-u} - 1}$$

$$\int \pm \frac{du}{\sqrt{\frac{k}{a-u} - 1}} = \int dx \quad (\text{変数分離形})$$

となる．左辺を $u = a - \dfrac{1}{2}k(1-\cos t)$ と変数変換すると

$$\begin{aligned}
x &= \pm\int \left(\frac{1+\cos t}{1-\cos t}\right)^{-\frac{1}{2}} \left(-\frac{k}{2}\right)\sin t\, dt \\
&= \mp\frac{k}{2}\int \left(\frac{1-\cos t}{1+\cos t}(1-\cos^2 t)\right)^{\frac{1}{2}} dt \\
&= \mp\frac{k}{2}\int (1-\cos t)dt \\
&= \mp\frac{k}{2}(t - \sin t) + C
\end{aligned}$$

となり,

$$\begin{cases} x &= \mp\dfrac{1}{2}k(t-\sin t)+C \\ y &= a-\dfrac{1}{2}k(1-\cos t) \end{cases} \tag{4.5}$$

を得る．ここで C は $t=0$ として

$$x=C,\quad y=a$$

より $C=0$ と分かり，$x\geq 0$ より,

$$\begin{cases} x &= \dfrac{1}{2}k(t-\sin t) \\ y &= a-\dfrac{1}{2}k(1-\cos t) \end{cases} \tag{4.6}$$

となる．また k は

$$\begin{cases} 1 &= \frac{1}{2}k(t-\sin t) \\ b &= a-\frac{1}{2}k(1-\cos t) \end{cases}$$

により決まる数である．(4.6) はサイクロイド曲線と呼ばれる曲線である．

例題 2

$$l(u) \quad = \quad \int_0^1 \sqrt{1+u'(x)^2}dx$$

を許容集合

$$V=\{u\in C^0[0,1]\cap C^1(0,1)\mid u(0)=a,u(1)=b\}$$

で最小化せよ．

[解答] $F(u,u')=\sqrt{1+(u')^2}$ に (4.4) を適用すると,

$$F(u,u')-u'F_{u'}(u,u')=\sqrt{1+(u')^2}-u'\frac{2u'}{2\sqrt{1+(u')^2}}=\frac{1}{2\sqrt{1+(u')^2}}=k(\text{定数})$$

よって

$$u'(x)=k(\text{定数をおき直した})$$

となる．よって C を定数として

$$u(x)=kx+C$$

という直線となり，$u(0)=a$, $u(1)=b$ より

$$u(x)=(b-a)x+a$$

と分かる． □

4.2　制約付き変分問題

例題 1　(球面上の最短距離)
xyz 平面内の原点を中心とする半径 1 の球面上の点 $A(x_a, y_a, z_a)$, $B(x_b, y_b, z_b)$ に対し，A, B を結ぶ球面上の曲線で最短のものを求めよ．

時刻 0 から 1 までで曲線上を A から B まで動くとき，時刻 t での点の位置を $(x(t), y(t), z(t))$ とおく．ただし $(x(0), y(0), z(0)) = (x_a, y_a, z_a)$, $(x(1), y(1), z(1)) = (x_b, y_b, z_b)$ であり，球面上を動くので

$$x(t)^2 + y(t)^2 + z(t)^2 = 1$$

である．曲線の長さは

$$\int_0^1 \sqrt{\dot{x}(t)^2 + \dot{y}(t)^2 + \dot{z}(t)^2}dt$$

で与えられる（上付きドットは t に関する微分とする）．
よって問題は

$$\int_0^1 \sqrt{\dot{x}(t)^2 + \dot{y}(t)^2 + \dot{z}(t)^2}dt \tag{4.7}$$

を許容集合

$$\begin{aligned} V = \{(x(t), y(t), z(t)) \quad | \quad & x(t), y(t), z(t) \in C^0[0,1] \cap C^1(0,1), x(t)^2 + y(t)^2 + z(t)^2 = 1, \\ & \mathbf{x}(0) = \mathbf{x}_a, \mathbf{x}(1) = \mathbf{x}_b\} \end{aligned}$$

で最小化する問題となる．ただし $\mathbf{x}$ などは (x, y, z) という対応する文字のベクトルを表す記号とする．(4.7) はベクトル関数 $\mathbf{x}(t) = (x(t), y(t), z(t))$ に対する汎関数と考えられる．

ラグランジュ関数とオイラー方程式　実数 λ に対し

$$L(\mathbf{x}(t)) = \int_0^1 \sqrt{\dot{x}(t)^2 + \dot{y}(t)^2 + \dot{z}(t)^2} + \lambda\big(x(t)^2 + y(t)^2 + z(t)^2 - 1\big)dt$$

を Lagrange 関数と呼ぶ．もしも $x(t)^2 + y(t)^2 + z(t)^2 = 1$ を満たすベクトル関数 $\mathbf{x}(t)$ が

$$V' = \{(x(t), y(t), z(t)) \mid x(t), y(t), z(t) \in C^0[0,1] \cap C^1(0,1), \mathbf{x}(0) = \mathbf{x}_a, \mathbf{x}(1) = \mathbf{x}_b\}$$

での $L(\mathbf{x}(t))$ の極小値を与えるならば，その $\mathbf{x}$ はもちろん V に制限した中でも極小値を与える．このように V' での極小解が丁度 V に属するような λ と $\mathbf{x}(t)$ を求める．

$$F(t, \mathbf{x}(t), \cdot\mathbf{x}(t)) = \sqrt{\dot{x}(t)^2 + \dot{y}(t)^2 + \dot{z}(t)^2} + \lambda\big(x(t)^2 + y(t)^2 + z(t)^2 - 1\big)$$

とおく．

関数ベクトル $\mathbf{p}(t) = (p(t), q(t), r(t))$ を $\mathbf{p}(0) = \mathbf{p}(1) = \mathbf{0}$ となる任意の滑らかな 3 次元ベクトル関数とする（テスト関数）.

もし $\mathbf{x}(t)$ が (4.7) の最小解であるなら,

$$\frac{\partial}{\partial\varepsilon}\int_0^1 F(t, \mathbf{x}(t) + \varepsilon\mathbf{p}(t), \dot{\mathbf{x}}(t) + \varepsilon\dot{\mathbf{p}}(t))dx\bigg|_{\varepsilon=0} = 0$$

となる．これよりオイラー方程式は

$$\begin{aligned} F_x - \frac{d}{dt}F_{\dot{x}} &= 0 \\ F_y - \frac{d}{dt}F_{\dot{y}} &= 0 \\ F_z - \frac{d}{dt}F_{\dot{z}} &= 0 \end{aligned}$$

となる．今,

$$F_x = 2\lambda x, \quad F_{\dot{x}} = \frac{\dot{x}}{\sqrt{\dot{x}(t)^2 + \dot{y}(t)^2 + \dot{z}(t)^2}} \qquad \text{etc.}$$

なので

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt}\frac{\dot{x}}{\sqrt{\dot{x}(t)^2 + \dot{y}(t)^2 + \dot{z}(t)^2}} &= 2\lambda x \\ \frac{d}{dt}\frac{\dot{y}}{\sqrt{\dot{x}(t)^2 + \dot{y}(t)^2 + \dot{z}(t)^2}} &= 2\lambda y \\ \frac{d}{dt}\frac{\dot{z}}{\sqrt{\dot{x}(t)^2 + \dot{y}(t)^2 + \dot{z}(t)^2}} &= 2\lambda z \end{aligned}$$

となる．ここで $\sqrt{\dot{x}(t)^2 + \dot{y}(t)^2 + \dot{z}(t)^2}$ は | 速度 | を表しているので，これを一定 (c とおく) としても一般性を失わない．よって

$$\begin{aligned} \ddot{x} &= 2c\lambda x \\ \ddot{y} &= 2c\lambda x \\ \ddot{z} &= 2c\lambda x \end{aligned}$$

を得る．これらは各々2 階線型常微分方程式であり，一般解は

$$\begin{aligned} x &= x_+e^{t\sqrt{2c\lambda}} + x_-e^{-t\sqrt{2c\lambda}} \\ y &= y_+e^{t\sqrt{2c\lambda}} + y_-e^{-t\sqrt{2c\lambda}} \\ z &= z_+e^{t\sqrt{2c\lambda}} + z_-e^{-t\sqrt{2c\lambda}} \end{aligned}$$

で与えられる．よってある定数 c_1, c_2, c_3 が存在して

$$c_1x + c_2y + c_3z = 0$$

となる．従って $\mathbf{x}(t)$ は原点を通る平面上を動くことが分かり，最短距は A, B を通る大円 $(A, B, O$ を通る平面での球面の切り口$)$ で与えられる．

実際，$A = (1, 0, 0), B = (\cos b, \sin b, 0)$ のとき大円は $z = 0$ であり，$(x(t), y(t), z(t)) = (\cos bt, \sin bt, 0)$ は $\lambda = -\dfrac{b}{2}$ のときオイラー方程式を満たす.

問　$(x(t), y(t), z(t)) = (\cos bt, \sin bt, 0)$ が $\lambda = -\dfrac{b}{2}$ のときオイラー方程式を満たすことを確かめよ.