

拡大 Weyl 群 $\widetilde{W}(A_1^{(1)} \times A_3^{(1)})$ の KNY 双有理表現の 拡張として得られる $\widetilde{W}(D_5^{(1)})$

東京大学大学院数理科学研究科 竹縄 知之 (TAKENAWA Tomoyuki)

1 序論

Painlevé テストの離散類似として特異点閉じ込め判定法が導入 [2] されて以来, 多くの離散 Painlevé 方程式が発見され研究されて来た [3, 10]. 離散 Painlevé 方程式は 2 次元の非自励的写像であってこの判定法を満たし, (連続の) Painlevé 方程式へ極限移行できるものと考えられて来た. 近年坂井により, これらは (対称性から見て) 全て有理曲面と拡大 Weyl 群の関係を調べることにより得られることが分かった [11].

一方, 最近梶原・野海・山田 (KNY) [6] により, 拡大 Weyl 群 $\widetilde{W}(A_{m-1}^{(1)} \times A_{n-1}^{(1)})$ の有理体 $\mathbb{C}(x_{ij})$ 上の表現が提案された (ただしこの表現は常に忠実であるとは限らない, 例えば m または n が 1 のときや $m = n = 2$ のときは忠実ではない). この表現により高階離散 Painlevé 方程式が得られると期待されている. $m = 2$ で $n = 3, 4$ のとき, 平行移動の作用は 2 次元非自励的離散力学系とみなせ, よって離散 Painlevé 方程式であると考えられる. これらの方程式に着いては特殊解やいくつかの性質が調べられている [5, 8]. $m = 2, n = 4$ のとき, 一つの平行移動の作用は Painlevé V 型方程式 P_V の q 差分類似と考えられていた. しかしここには一つ問題がある. それは坂井の差分 Painlevé 方程式の対称性のリストに $\widetilde{W}(A_1^{(1)} \times A_3^{(1)})$ という対称性はない, と言うことである (一方 $m = 2, n = 3$ のときはパラメータを除けば坂井のリストにある一つの方程式 — $A_3^{(1)}$ 型曲面の族に付随し $\widetilde{W}(A_1^{(1)} \times A_2^{(1)})$ の対称性をもつもの — と一致する). 従ってその対称性が有理曲面の族に付随するもっと大きな群の部分群になっていると考えるのは自然であろう.

本報告では $m = 2, n = 4$ の場合に平行移動の作用が $A_3^{(1)}$ 型有理曲面 (反標準因子の既約分解が $A_3^{(1)}$ 型であるような有理曲面) の族の自己同型に持ち上げられ, このような自己同型が $\widetilde{W}(D_5^{(1)})$ となる (よって坂井の分類では q - P_V ではない) ことを報告する. また, その作用が q - P_{VI} と共役な 2 つの写像に分解できること, 元の平行移動の作用と可換な同型全体が $W(A_1^{(1)}) \times \widetilde{W}(A_3^{(1)}) \times \widetilde{W}(A_1^{(1)})$ を成すことを報告する.

2 $\widetilde{W}(A_{m-1}^{(1)} \times A_{n-1}^{(1)})$ の双有理表現

KNY による $\widetilde{W}(A_{m-1}^{(1)} \times A_{n-1}^{(1)})$ ($i = 0, 1, \dots, m-1, j = 0, 1, \dots, n-1$ で添字は $m\mathbb{Z}, n\mathbb{Z}$ を法として考える) の双有理表現は以下のように定義される.

Weyl 群の単純ルートに対応する元を

$$r_i \in W(A_{m-1}^{(1)}), s_j \in W(A_{n-1}^{(1)}),$$

Dynkin 図の回転に対応する元を

$$\pi \in \text{Aut}(\text{Dynkin}(A_{m-1}^{(1)})), \rho \in \text{Aut}(\text{Dynkin}(A_{n-1}^{(1)}))$$

と書く．これらの元の $\mathbb{C}(x_{i,j})$ への作用を

$$\begin{aligned} r_i(x_{ij}) &= x_{i+1,j} \frac{P_{i,j-1}}{P_{ij}}, \quad r_i(x_{i+1,j}) = x_{ij} \frac{P_{ij}}{P_{i,j-1}}, \quad r_k(x_{ij}) = x_{ij}, \quad (k \neq i, i+1), \\ s_j(x_{ij}) &= x_{i,j+1} \frac{Q_{i-1,j}}{Q_{ij}}, \quad s_j(x_{i,j+1}) = x_{ij} \frac{Q_{ij}}{Q_{i-1,j}}, \quad s_k(x_{ij}) = x_{ij}, \quad (k \neq j, j+1), \\ \pi(x_{ij}) &= x_{i+1,j}, \quad \rho(x_{i,j}) = x_{i,j+1}, \end{aligned}$$

ただし

$$P_{ij} = \sum_{a=0}^{n-1} \left(\prod_{k=0}^{a-1} x_{i,j+k+1} \prod_{k=a+1}^{n-1} x_{i+1,j+k+1} \right), \quad Q_{ij} = \sum_{a=0}^{m-1} \left(\prod_{k=0}^{a-1} x_{i+k+1,j} \prod_{k=a+1}^{m-1} x_{i+k+1,j+1} \right)$$

と定義する．例えば $(m, n) = (2, 4)$ のとき,

$$P_{00} = x_{1,2}x_{1,3}x_{1,0} + x_{0,1}x_{1,3}x_{1,0} + x_{0,1}x_{0,2}x_{1,0} + x_{0,1}x_{0,2}x_{0,3},$$

$$Q_{00} = x_{0,1} + x_{1,0}$$

である． $m = 2$ で $n = 3, 4$ のときはこの表現が忠実であることが後で述べるルート系への作用を調べることにより分かる．

$(m, n) = (2, 4)$ のとき,

$$\left(\frac{x_{0,j}x_{1,j}}{x_{0,j+1}x_{1,j+1}} \right)^{1/2} = a_j, \quad \left(\frac{x_{0,j}x_{0,j+1}}{x_{1,j}x_{1,j+1}} \right)^{1/2} = f_j,$$

という変数変換により $r_0, r_1, s_0, s_1, s_2, s_3, \pi, \rho$ の作用は

$$\begin{aligned} r_0(a_i) &= a_i, \quad r_0(f_i) = \frac{a_i(1 + f_{i+4} + f_{i+3}f_{i+4} + f_{i+2}f_{i+3}f_{i+4})}{f_{i+3}(1 + f_{i+2} + f_{i+1}f_{i+2} + f_i f_{i+1}f_{i+2})} \\ \pi(a_i) &= a_i, \quad \pi(f_i) = \frac{1}{f_i} \\ r_1 &= \pi \circ r_0 \circ \pi \\ s_i(a_j) &= a_j a_i^{-c_{i,j}}, \quad s_i(f_j) = f_j \left(\frac{a_i + f_i}{1 + a_i f_i} \right)^{u_{i,j}} \\ \rho(a_i) &= a_{i+1}, \quad \rho(f_i) = f_{i+1} \end{aligned}$$

と変換される．ここで $c_{i,j}$ 及び $u_{i,j}$ は

$$(c_{i,j}) = \begin{pmatrix} 2 & -1 & 0 & -1 \\ -1 & 2 & -1 & 0 \\ 0 & -1 & 2 & -1 \\ -1 & 0 & -1 & 2 \end{pmatrix}, \quad (u_{i,j}) = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & -1 \\ -1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & -1 & 0 \end{pmatrix}$$

である．

注意 変数変換により $a_0 a_1 a_2 a_3 = 1$ となるが，この制約を取り除いて $a_0 a_1 a_2 a_3 = q$ とおいてもこれらの作用は $\widetilde{W}(A_{m-1}^{(1)} \times A_{n-1}^{(1)})$ を生成する．

$\pi \circ r_0$ という元は $A_1^{(1)}$ の平行移動であり離散力学系

$$\begin{aligned}\bar{a}_0 &= a_0, & \bar{a}_1 &= a_1, & \bar{a}_2 &= a_2, & \bar{a}_3 &= a_3, \\ \bar{f}_0 &= a_0 a_1 f_1 \frac{1 + a_2 f_2 + a_2 a_3 f_2 f_3 + a_2 a_3 a_0 f_2 f_3 f_0}{1 + a_0 f_0 + a_0 a_1 f_0 f_1 + a_0 a_1 a_2 f_0 f_1 f_2}, \\ \bar{f}_1 &= a_1 a_2 f_2 \frac{1 + a_3 f_3 + a_3 a_0 f_3 f_0 + a_3 a_0 a_1 f_3 f_0 f_1}{1 + a_1 f_1 + a_1 a_2 f_1 f_2 + a_1 a_2 a_3 f_1 f_2 f_3}, \\ \bar{f}_2 &= a_2 a_3 f_3 \frac{1 + a_0 f_0 + a_0 a_1 f_0 f_1 + a_0 a_1 a_2 f_0 f_1 f_2}{1 + a_2 f_2 + a_2 a_3 f_2 f_3 + a_2 a_3 a_0 f_2 f_3 f_0}, \\ \bar{f}_3 &= a_3 a_0 f_0 \frac{1 + a_1 f_1 + a_1 a_2 f_1 f_2 + a_1 a_2 a_3 f_1 f_2 f_3}{1 + a_3 f_3 + a_3 a_0 f_3 f_0 + a_3 a_0 a_1 f_3 f_0 f_1}\end{aligned}$$

を与える．これは

$$a_3 = 1/(a_0 a_1 a_2 q), \quad f_0 = x, \quad f_1 = y, \quad f_2 = c/x, \quad f_3 = d/y$$

という変数変換により

$$\varphi : (x, y) \mapsto (\bar{x}, \bar{y}),$$

$$\begin{cases} \bar{x} = \frac{q a_0 a_1 x y + c(d + a_0 d x + q a_0 a_1 a_2 y)}{q x(1 + a_0(x + a_1 a_2 c y + a_1 x y))} \\ \bar{y} = \frac{c(d + a_0 d x + a_0 a_1 d x y + q a_0 a_1 a_2 y)}{y(q a_0 x(1 + a_1 y) + c(d + q a_0 a_1 a_2 y))}, \end{cases} \quad (1)$$

及びパラメータの変換

$$(\bar{a}_0, \bar{a}_1, \bar{a}_2, \bar{q}, \bar{c}, \bar{d}) = (a_0, a_1, a_2, q, \frac{d}{q}, \frac{c}{q})$$

という 2 次元非自励的力学系になる．

3 初期値空間と Cremona 等長変換

3.1 初期値空間

初期値空間の概念は初め，岡本により連続の Painlevé 方程式に対して導入され [9]，近年坂井により離散 Painlevé 方程式に対して応用され [11]，さらに広く研究されている．離散の場合，この概念は有理曲面の族の自己同型と関係がある．曲面とこのような自己同型の成す群の関係については代数幾何的な観点からも多くの研究がある [1, 7]．この節では坂井の方法に基づき φ に対する初期値空間を構成する．

X, Y を有理曲面， X', Y' を連続するブローアップ $\pi_X : X' \rightarrow X, \pi_Y : Y' \rightarrow Y$ によって得られる有理曲面とする．有理写像 $\varphi' : X' \rightarrow Y'$ が有理写像 $\varphi : X \rightarrow Y$ から持ち上げられるとは， φ が定義される任意の点で $\pi_Y \circ \varphi' = \varphi \circ \pi_X$ が成り立つことをいう．

定義 (初期値空間)． X_i を有理曲面， $\{\varphi_i : X_i \rightarrow X_{i+1}\}$ を X_i から X_{i+1} への双有理写像の列とする．各 φ_i が Y_i から Y_{i+1} への同型写像，つまり双正則写像，に持ち上げられるとき，有理曲面の列

$\{Y_i\}$ (または Y_i 自身) は $\{\varphi_i\}$ の初期値空間であるという .

写像 (1) を $\mathbb{P}^1 \times \mathbb{P}^1$ からそれ自身への双有理写像とみなす . 通常の方法に従い , φ と φ^{-1} の不確定点を次々とブローアップすることにより以下のような曲面 X_i を得る (図 1) . ブローアップする点の全変換は

$$\begin{aligned} E_1 : (x, y) &= (0, -da_3) & E_2 : (x, y) &= (0, -a_1) \\ E_3 : (x, y) &= (-1/a_0, 0) & E_4 : (x, y) &= (-c/a_2, 0) \\ E_5 : (1/x, y) &= (0, -1/a_1) & E_6 : (1/x, y) &= (0, d/a_3) \\ E_7 : (x, 1/y) &= (-ca_2, 0) & E_8 : (x, 1/y) &= (-a_0, 0), \end{aligned} \quad (2)$$

である . ここで q の代わりに $a_3 = 1/(a_0 a_1 a_2 q)$ を用いた . またパラメータは時間発展に伴って変化する .

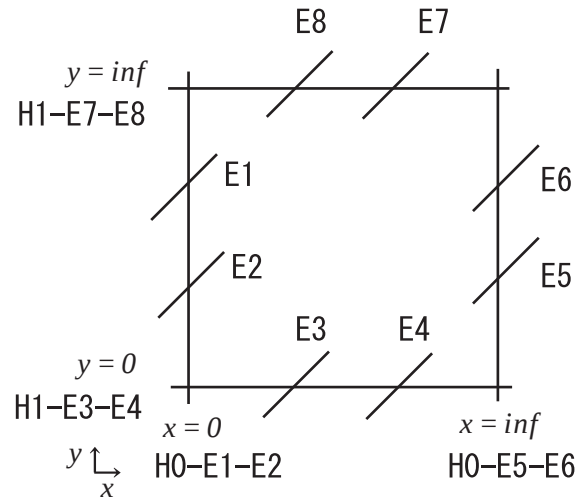


図 1: 既約因子類とその交叉

定理 3.1 写像 $\varphi : \mathbb{P}^1 \times \mathbb{P}^1 \rightarrow \mathbb{P}^1 \times \mathbb{P}^1$ (1) は X_i から X_{i+1} への同型写像の列に持ち上げられる .

X を任意の $a_i, c, d \in \mathbb{C} \setminus \{0\}$ に対して $\mathbb{P}^1 \times \mathbb{P}^1$ から (2) というブローアップによって得られた曲面とする . $x = \text{constant}$, (or $y = \text{constant}$) の全変換の線形同値類を H_0 (resp. H_1) と書く . また曲面 X の Picard 群 , つまり X 上の因子の線形同値類が成す群 , を $\text{Pic}(X)$ と書く . 写像 φ は押し出し $\varphi_* : \text{Pic}(X_i) \rightarrow \text{Pic}(X_{i+1})$ ($\text{Pic}(X_i) \simeq \text{Pic}(X_{i+1})$):

$$\begin{aligned} H_0 &\mapsto 2H_0 + H_1 - E_2 - E_4 - E_6 - E_8 \\ H_1 &\mapsto H_0 + 2H_1 - E_2 - E_4 - E_6 - E_8 \\ E_1 &\mapsto H_0 + H_1 - E_2 - E_4 - E_8 & E_2 &\mapsto E_5 \\ E_3 &\mapsto H_0 + H_1 - E_2 - E_4 - E_6 & E_4 &\mapsto E_7 \\ E_5 &\mapsto H_0 + H_1 - E_4 - E_6 - E_8 & E_6 &\mapsto E_1 \\ E_7 &\mapsto H_0 + H_1 - E_2 - E_6 - E_8 & E_8 &\mapsto E_3 \end{aligned}$$

を導く .

3.2 Cremona 等長変換の成す群

この節では、色々なパラメータに対する X の族の自己同型を考える。
 X の Picard 群は

$$\text{Pic}(X) = \mathbb{Z}H_0 + \mathbb{Z}H_1 + \mathbb{Z}E_1 + \cdots + \mathbb{Z}E_8$$

という $\mathbb{Z}$ 加群 (格子) である。任意の 2 つの因子の交点数は交叉形式

$$H_i \cdot H_j = 1 - \delta_{i,j}, \quad E_k \cdot E_l = -\delta_{k,l}, \quad H_i \cdot E_k = 0 \quad (3)$$

によって計算できる。

D_0, D_1, D_2, D_3 を

$$\begin{aligned} D_1 &= H_0 - E_1 - E_2, & D_1 &= H_1 - E_3 - E_4 \\ D_2 &= H_0 - E_5 - E_6, & D_3 &= H_1 - E_7 - E_8 \end{aligned}$$

という因子とする。 X の反標準因子, $-K_X = 2H_0 + 2H_1 - E_1 - \cdots - E_8$ は

$$-K_X = 2D_0 + 2D_1 + 2D_2 + 2D_3$$

と素因子の和に (generic なパラメータに対し) 一意に分解される。 D_i の交叉の様子は以下の図によって表される。



このような有理曲面は $A_3^{(1)}$ 型有理曲面と呼ばれ、坂井のリストの $q\text{-}P_{VI}$ の曲面と同じ型である。

定義 . $\text{Pic}(X)$ の自己同型 s が i) $\text{Pic}(X)$ 上の交叉形式, ii) 標準因子 K_X , iii) 有効な因子類の成す反群, を保つとき, s は Cremona 等長変換であるという [1, 7] .

X, X' を有理曲面とする。一般に φ が X から X' への同型写像ならば Picard 群への作用 $\varphi_* : \text{Pic}(X) \rightarrow \text{Pic}(X')$ (または $\varphi^* : \text{Pic}(X') \rightarrow \text{Pic}(X)$) ($\text{Pic}(X) \simeq \text{Pic}(X')$) は Cremona 等長変換である。

Cremona 等長変換は集合 $\{D_i\}$ とその (交叉形式に関する) 直交格子

$$Q := \mathbb{Z}\alpha_0 \oplus \mathbb{Z}\alpha_1 \oplus \mathbb{Z}\alpha_2 \oplus \mathbb{Z}\alpha_3 \oplus \mathbb{Z}\alpha_4 \oplus \mathbb{Z}\alpha_5 \quad (5)$$

を保つ。ここで α_i は

$$\begin{aligned} \alpha_0 &= E_5 - E_6, & \alpha_1 &= E_1 - E_2 \\ \alpha_2 &= H_1 - E_1 - E_5, & \alpha_3 &= H_0 - E_3 - E_7 \\ \alpha_4 &= E_3 - E_4, & \alpha_5 &= E_7 - E_8 \end{aligned}$$

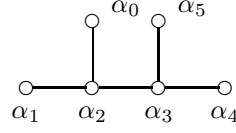
である。

α_i に対応する $\text{Pic}(X)$ 上の作用 w_i を

$$w_i(D) = D - \frac{2D \cdot \alpha_i}{\alpha_i \cdot \alpha_i} \alpha_i,$$

ただし $D \in \text{Pic}(X)$, と定める . Cartan 行列は

$$(c_{i,j}) = \begin{pmatrix} 2 & 0 & -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & -1 & 0 & 0 & 0 \\ -1 & -1 & 2 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 2 & -1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & -1 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 & 0 & 2 \end{pmatrix}$$



となる .

Dynkin 図の自己同型 $\sigma_{102345}, \sigma_{543210}$ は

$$\begin{aligned} \sigma_{102345} : & \quad (H_0, H_1, E_1, E_2, E_3, E_4, E_5, E_6, E_7, E_8) \\ & \quad \mapsto (H_0, H_1, E_5, E_6, E_3, E_4, E_1, E_2, E_7, E_8) \\ \sigma_{543210} : & \quad (H_0, H_1, E_1, E_2, E_3, E_4, E_5, E_6, E_7, E_8) \\ & \quad \mapsto (H_1, H_0, E_3, E_4, E_1, E_2, E_7, E_8, E_5, E_6), \end{aligned} \quad (6)$$

と定める . ここで σ の添字は置換に対応している . 便利のために $\sigma_{012354} = \sigma_{543210} \circ \sigma_{102345} \circ \sigma_{543210}$ も用いる . また簡単のため $\sigma_{102345}, \sigma_{012354}$ を σ_{10}, σ_{54} と書く .

格子 $\bigoplus \mathbb{Z}\alpha_i$ の自己同型で交叉形式で与えられる内積を保つものは $\pm \widetilde{W}(D_5^{(1)})$ であるが ([4] §5.10 参照) , $-\widetilde{W}(D_5^{(1)})$ の元は因子類の有効性を保たないことより , 次の定理を得る (有効性を保つことは曲面の族の同型写像として実現することにより直接確かめられる) .

定理 3.2 X の Cremona 等長変換の成す群は $\widetilde{W}(D_5^{(1)})$ である .

系 3.3 写像 φ^2 のルート系の基底に対する作用は

$$\begin{aligned} \varphi^2 : (\alpha_0, \alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \alpha_4, \alpha_5) & \mapsto \\ & (\alpha_0 + K, \alpha_1 + K, \alpha_2 - K, \alpha_3 - K, \alpha_4 + K, \alpha_5 + K) \end{aligned}$$

となる . ここで $K = -K_X = \alpha_0 + \alpha_1 + 2\alpha_2 + 2\alpha_3 + \alpha_4 + \alpha_5$ は自然な中心元に対応する . また , φ は生成元によって

$$\varphi = \sigma_{54} \circ \sigma_{10} \circ w_5 \circ w_4 \circ w_1 \circ w_0 \circ w_2 \circ w_3 \circ w_2$$

と書かれる .

3.3 Cremona 等長変換の実現

定理 3.2 の Cremona 等長変換は全て X の族の自己同型に持ち上げられるような $\mathbb{P}^1 \times \mathbb{P}^1$ 上の双有理写像として実現できる (参照:[11, 12]) .

生成元の双有理作用は以下の通りである． $(x, y, a_0, a_1, a_2, a_3, c, d)$ の像はそれぞれ

$$\begin{aligned}
& \left(x, y\sqrt{\frac{a_3}{a_1d}}; a_0, \sqrt{\frac{a_1a_3}{d}}, a_2, \sqrt{a_1a_3d}, c, \frac{a_3}{a_1} \right) && \text{by } w_0 \\
& \left(x, y\sqrt{\frac{a_1}{a_3d}}; a_0, \sqrt{a_1a_3d}, a_2, \sqrt{\frac{a_1a_3}{d}}, c, \frac{a_1}{a_3} \right) && \text{by } w_1 \\
& \left(\frac{x(a_1y+1)}{(y+a_3d)}\sqrt{\frac{a_3d}{a_1}}, \frac{y}{\sqrt{a_1a_3d}}; a_0\sqrt{a_1a_3d}, \sqrt{\frac{a_1}{a_3d}}, a_2\sqrt{a_1a_3d}, \sqrt{\frac{a_3}{a_1d}}, c, \frac{1}{a_1a_3} \right) && \text{by } w_2 \\
& \left(\frac{x}{\sqrt{a_0a_2c}}, \frac{y(x+a_2c)}{(a_0x+1)}\sqrt{\frac{a_0}{a_2c}}; \sqrt{\frac{a_0}{a_2c}}, a_1\sqrt{a_0a_2c}, \sqrt{\frac{a_2}{a_0c}}, a_3\sqrt{a_0a_2c}, \frac{1}{a_0a_2}, d \right) && \text{by } w_3 \\
& \left(x\sqrt{\frac{a_2}{a_0c}}, y; \sqrt{\frac{a_0a_2}{c}}, a_1, \sqrt{a_0a_2c}, a_3, \frac{a_2}{a_0}, d \right) && \text{by } w_4 \\
& \left(x\sqrt{\frac{a_0}{a_2c}}, y; \sqrt{a_0a_2c}, a_1, \sqrt{\frac{a_0a_2}{c}}, a_3, \frac{a_0}{a_2}, d \right) && \text{by } w_5 \\
& \left(\frac{1}{x}, \frac{y}{d}; \frac{1}{a_0}, \frac{1}{a_3}, \frac{1}{a_2}, \frac{1}{a_1}, \frac{1}{c}, \frac{1}{d} \right) && \text{by } \sigma_{10} \\
& \left(\frac{y}{d}, \frac{x}{c}; \frac{1}{a_3}, \frac{1}{a_2}, \frac{1}{a_1}, \frac{1}{a_0}, \frac{1}{d}, \frac{1}{c} \right) && \text{by } \sigma_{543210}
\end{aligned}$$

となる．

注意 これらの変換を坂井の論文 [11] と直接関係付けるには, f, g 及び $b_1, b_2, \dots, b_8$ を $f = y, g = x$ 及び $b_1 = -1/a_0, b_2 = -c/a_2, b_3 = -a_2c, b_4 = -a_0, b_5 = -da_3, b_6 = -a_1, b_7 = -1/a_2, b_8 = -d/a_3$ とおけば良い．(ただし坂井の論文と本報告では正規化の仕方が違うので, これらは各双有理変換において f, g の係数の自由度を適当に取り直さないと一致しない．坂井の論文には 8 個, 本報告では 6 個のパラメータがある．曲面 X_i と Picard 群と有効因子が同じ曲面を考える．これらの曲面を) $\mathbb{P}^1 \times \mathbb{P}^1$ の自己同型で正規化すると 6 個のパラメータが残る．)

3.4 q -Painlevé VI 方程式との関係

写像 ψ を

$$\psi : (x, y) \mapsto (\bar{x}, \bar{y}),$$

$$\begin{cases} \bar{x} = y \\ \bar{y} = \frac{c(a_1 + y)(d + qa_0a_1a_2y)}{x(qa_0a_1a_2d + y)(1 + a_1y)} \end{cases} \quad (7)$$

及びパラメータに対する写像

$$(\bar{a}_0, \bar{a}_1, \bar{a}_2, \bar{q}, \bar{c}, \bar{d}) = \left(\frac{1}{a_1}, \frac{1}{qa_0}, qa_0a_1a_2, q, d, c \right)$$

と定める．写像 ψ^2 は q - P_{VI} である．実際ルート格子に対しての作用は

$$(\alpha_0, \alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \alpha_4, \alpha_5) \mapsto (\alpha_0, \alpha_1, \alpha_2 - K, \alpha_3 + K, \alpha_4, \alpha_5)$$

となる．

命題 3.4 写像 φ^2 は q - $P_{VI}(= \psi^2)$ と共役な写像に

$$\varphi^2 = (\sigma_{543210} \circ w_3 \circ q\text{-}P_{VI} \circ w_3 \circ \sigma_{543210}) \circ (w_3 \circ q\text{-}P_{VI} \circ w_3)$$

と分解できる．

4 可換な元の成す群

この節では $\widetilde{W}(D_5^{(1)})$ の元で φ^2 と可換な元の成す群 (W_C と書く) を調べる．
以下の定理を得る．

定理 4.1

$$W_C \simeq W(A_1^{(1)}) \times \widetilde{W}(A_3^{(1)}) \times \widetilde{W}(A_1^{(1)})$$

が成り立つ．ここで各記号の意味は以下の通りである．

i) 最初の $W(A_1^{(1)})$ は

$$(\alpha_2 + \alpha_3, \alpha_0 + \alpha_1 + \alpha_2 + \alpha_3 + \alpha_4 + \alpha_5)$$

というルート系の底で定まる *Weyl* 群であり，元の $W(A_1^{(1)})$ と一致する．

ii) $\widetilde{W}(A_3^{(1)})$ は

$$(\beta_0, \beta_1, \beta_2, \beta_3) := (\alpha_3 + \alpha_5, \alpha_1 + \alpha_2, \alpha_3 + \alpha_4, \alpha_0 + \alpha_2)$$

というルート系の底と *Dynkin* 図の自己同型 $\sigma_{\beta(1032)}, \sigma_{\beta(3210)}$ で定まる拡大 *Weyl* 群であり，元の $W(A_3^{(1)})$ と拡大の部分を除いて一致する．

iii) 最後の $\widetilde{W}(A_1^{(1)})$ は

$$(\gamma_0, \gamma_1) := (\alpha_0 + \alpha_1 + \alpha_2 + \alpha_3, \alpha_2 + \alpha_3 + \alpha_4 + \alpha_5)$$

というルート系の底と *Dynkin* 図の自己同型 $\sigma_{\gamma(10)}$ で定まる拡大 *Weyl* 群である．

以下は証明の概略である．

格子 Q (5) の部分集合で φ^2 がその元を保つものは格子

$$Q_B := \left\{ \sum_{i=0}^5 a_i \alpha_i \in Q; a_0 + a_1 - a_2 - a_3 + a_4 + a_5 \right\}$$

となることに注意する． Q_B は

$$\begin{aligned} \alpha \in Q_B &= \text{Span}_{\mathbb{Z}}(\beta_0, \beta_1, \beta_2, \beta_3, \gamma_0) \\ &= \text{Span}_{\mathbb{Z}}(\beta_0, \beta_1, \beta_2, \gamma_0, \gamma_1) \end{aligned} \tag{8}$$

と表される．

補題 4.2 群 W_C は格子 Q_B を保つ．

補題 4.3 格子 Q_B の同型で交叉形式を保つもの全体は拡大 *Weyl* 群 $\pm \widetilde{W}(A_3^{(1)}) \times \pm \widetilde{W}(A_1^{(1)})$ を成す．

補題 4.2 と補題 4.3 により， W_C の Q_B 上の作用は $W_B := \widetilde{W}(A_3^{(1)}) \times \widetilde{W}(A_1^{(1)})$ で与えられることが分かる．付録 B はこの作用の Q 全体への一つの拡張である．この拡張の自由度が丁度定理の i) の $W(A_1^{(1)})$ になることより定理を得る．

A KNY の $\widetilde{W}(A_1^{(1)} \times A_3^{(1)})$ の $\widetilde{W}(D_5^{(1)})$ への埋め込み

ルート系の底への作用を調べるにより以下の関係式を得る .

$$\begin{aligned}
r_0 &= w_2 \circ w_3 \circ w_2 \\
r_1 &= w_0 \circ w_1 \circ w_4 \circ w_5 \circ w_2 \circ w_3 \circ w_2 \circ w_0 \circ w_1 \circ w_4 \circ w_5 \\
\pi &= w_0 \circ w_1 \circ w_4 \circ w_5 \circ \sigma_{10} \circ \sigma_{54} \\
s_0 &= w_5 \circ w_3 \circ w_5 \\
s_1 &= w_1 \circ w_2 \circ w_1 \\
s_2 &= w_4 \circ w_3 \circ w_4 \\
s_3 &= w_0 \circ w_2 \circ w_0 \\
\rho &= \sigma_{543210} \circ \sigma_{10}.
\end{aligned}$$

B 群 W_C の $\widetilde{W}(D_5^{(1)})$ への埋め込み

第 4 節で述べたように $\widetilde{W}(A_3^{(1)}) \times \widetilde{W}(A_1^{(1)})$ の格子 Q_B への作用の Q への拡張は一意ではなく , $W(A_1^{(1)})$ の分の自由度がある . 以下は一つの埋め込みである .

$$\begin{aligned}
r_0 &= w_2 \circ w_3 \circ w_2 \\
r_1 &= w_0 \circ w_1 \circ w_4 \circ w_5 \circ w_2 \circ w_3 \circ w_2 \circ w_0 \circ w_1 \circ w_4 \circ w_5 \\
w_{\beta_0} &= w_{\alpha_3+\alpha_5} = w_3 \circ w_5 \circ w_3 \\
w_{\beta_1} &= w_{\alpha_1+\alpha_2} = w_1 \circ w_2 \circ w_1 \\
w_{\beta_2} &= w_{\alpha_3+\alpha_4} = w_3 \circ w_4 \circ w_3 \\
w_{\beta_3} &= w_{\alpha_0+\alpha_2} = w_0 \circ w_2 \circ w_0 \\
w_{\gamma_0} &= w_{\alpha_0+\alpha_1+\alpha_2+\alpha_3} = w_3 \circ w_0 \circ w_2 \circ w_1 \circ w_2 \circ w_0 \circ w_3 \\
w_{\gamma_0} &= w_{\alpha_2+\alpha_3+\alpha_4+\alpha_5} = w_2 \circ w_5 \circ w_3 \circ w_4 \circ w_3 \circ w_5 \circ w_2
\end{aligned}$$

これらを導くのに

$$w_{w_\alpha(\beta)} = w_\alpha \circ w_\beta \circ w_\alpha,$$

いう関係式を用いた . Dynkin 図の自己同型の埋め込みは例えば

$$\begin{aligned}
\sigma_{\beta(1032)} &= w_5 \circ w_4 \circ w_1 \circ w_0 \circ \sigma_{543210} \\
\sigma_{\beta(3210)} &= w_5 \circ w_4 \circ w_1 \circ w_0 \circ \sigma_{543210} \circ \sigma_{54} \circ \sigma_{10} \\
\sigma_{\gamma(10)} &= w_5 \circ w_4 \circ w_1 \circ w_0 \circ \sigma_{54} \circ \sigma_{10}
\end{aligned}$$

で与えられる .

参考文献

- [1] Dolgachev, I. and Ortland, D., Point sets in projective spaces and theta functions, *Astérisque* Soc.Math.de France, **165**(1988)
- [2] Grammaticos, B., Ramani, A. and Papageorgiou, V., Do integrable mappings have the Painlevé property?, *Phys. Rev. Lett.*, **67**(1991), 1825–1827
- [3] Jimbo, M. and Sakai, H., A q -analog of the sixth Painlevé equation, *Lett. Math. Phys.*, **38**(1996), 145–154
- [4] Kac, V., Infinite dimensional Lie algebras 3rd edn, Cambridge: Cambridge University Press(1990)
- [5] Kajiwara K., Noumi, M. and Yamada, Y., A study on the fourth q -Painlevé equation, *J. Phys. A*, **34**(2001), 8563–8581
- [6] Kajiwara K., Noumi, M. and Yamada, Y., Discrete dynamical systems with $W(A_{m-1}^{(1)} \times A_{n-1}^{(1)})$ symmetry, *preprint* nlin.SI/0106029 (2001)
- [7] Looijenga, E., Rational surfaces with an anti-canonical cycle, *Annals of Math.*, **114**(1981), 267–322
- [8] Masuda, T., On the Rational Solutions of q -Painlevé V Equation. *Nagoya Math. J.*, at press, *preprint* nlin.SI/0107050 (2001)
- [9] Okamoto, K., Sur les feuilletages associés aux équations du second ordre à points critiques fixes de P.Painlevé (French), *Japan J. Math.*, **5**(1979), 1–79
- [10] Ramani, A., Grammaticos, B. and Hietarinta, J., Discrete versions of the Painlevé equations, *Phys. Rev. Lett.*, **67**(1991), 1829–1832
- [11] Sakai, H., Rational surfaces associated with affine root systems and geometry of the Painlevé equations, *Commun. Math. Phys.*, **220**(2001) 165–229
- [12] Takenawa, T., Discrete Dynamical Systems Associated with Root Systems of Indefinite Type, *Commun. Math. Phys.*, **224**(2001) 657–681