沿岸海洋学

後半担当：長井　健容

December 5, 2017

Contents

1 潮汐 **3**
- 1.1 地球、月、太陽 . . . 3
- 1.2 起潮力 . . . 4
- 1.3 平衡潮汐 . . . 8
- 1.4 太陽による潮汐 . . . 10
- 1.5 潮汐の波は"浅い波" . . . 11
  - 1.5.1 質量の保存、連続の式 . . . 12
- 1.6 潮汐の実際 . . . 19
- 1.7 潮汐のパワー . . . 20
- 1.8 潮汐の測定 . . . 25
- 1.9 潮汐と人々 . . . 26
  - 1.9.1 日本の海賊と潮汐 . . . 26

2 フーリエ解析 **26**
- 2.1 フーリエ級数 . . . 26
- 2.2 複素フーリエ級数 . . . 31
- 2.3 フーリエ変換 . . . 35
- 2.4 パーシブルの等式とスペクトル . . . 37
- 2.5 離散フーリエ変換 . . . 41
  - 2.5.1 l の範囲 . . . 41

3 Matlab/Octave を用いたフーリエ解析 **45**
- 3.1 Matlab/Octave 導入 . . . 45
  - 3.1.1 MATLB の起動 . . . 45
  - 3.1.2 基本的なコマンドの入力と実行 . . . 46

3.1.3 ベクトルや行列の定義、四則演算 48
3.1.4 Matlab/Octave のプログラム 51
3.2 Matlab/Octave でフーリエ変換する関数をつくる 53
3.2.1 Matlab/Octave の function 53
3.2.2 フーリエ変換の Matlab 関数 53

4 パワースペクトル密度の計算 58

5 内部波 64
5.1 内部波の分散関係 67
5.2 内部波の Ray Tracing 76
5.2.1 水平流の鉛直方向の変化：シア 78
5.3 分散関係から群速度を求める 81

6 Matlab を使って内部波の伝播を計算しよう 83

7 黒潮やメキシコ湾流 93
7.1 エクマン輸送 93
7.2 スベルドラップ平衡 96
7.3 西岸強化 98

8 Matlab で衛星海面高度計データを解析をしよう 102
8.1 海面高度データ 102
8.1.1 海面高度の動画を作成するプログラムを書こう 104
8.2 地衡流を計算する 106
8.2.1 緯度と経度を距離に変換する 106
8.2.2 海面高度データから海面地衡流を求める Matlab 関数をつくろう 107
8.2.3 海面高度データから黒潮流軸位置を抽出する Matlab 関数を作成しよう 109
8.2.4 複数の海面高度データを解析する 111

1　潮汐

地球が太陽の周りを回り、月が地球の周りを回る事で、地球の海には潮汐と呼ばれる波動現象が生じます。海水浴場でテントを砂浜に張っても、気づいたら段々と潮が満ち、テントを移動しなければならない等という事は、学生の皆さんも良く経験することだと思います。ここでは、その潮の満ち引きのメカニズムや性質、データ解析について学びましょう。

1.1　地球、月、太陽

大凡、46 億年前頃には、太陽が超新星の残骸が集まって形成され、生まれたばかりの太陽系には、ミニ惑星と呼ばれる現在ある太陽系の惑星よりも 10 分の 1 の大きさの惑星が、太陽の周りを 20 個程度回っていたと推測されています。これらが衝突を繰り返して、現在の太陽系が形成されたと言われています。

月の誕生については、何しろ誰も見たことが無いですから諸説ある様ですが、地球が経験した最後のミニ惑星との衝突時に、形成されたという説があります。これは、そのときのミニ惑星が太鼓の地球に斜め方向から衝突したために、衝突後に多くの残骸が地球外に漂い続け、それが地球の周りを回る月になったという説です。

太陽と地球、月の大きさとその直径は下表のようになります。

星名	直径	質量	地球との距離
太陽	140 万 km	2×10^{30} kg	1 億 4–5 千万 km
地球	12,750 km	6×10^{24} kg	
月	3,470 km	7×10^{22} kg	36–40 万 km

Table 1: 太陽と月と地球のサイズ

地球は太陽の周りを 1 年かけて回っています。一方月は、地球の周りを 27 日と 8 時間弱かけて、地球の公転面から 6 °ずれて楕円軌道を回っています。この月の公転運動は、地球の海洋に潮汐を生じさせる原因である万有引力と遠心力によって保持されています。月の公転運動と言ってしまえば、月が一方的に地球の周りを回っている様ですが、厳密には、地球と月両方が両者の共通重心の周りを回っています。共通重心は、やじろべえが重りの重さと枝の長さの兼ね合いで釣り合う様に、力のモーメントが釣り合う点として求められます。今、地球と月の距離を D、地球の中心から共通重心までの距

離を a とし、地球の質量を E、月の質量を M としたとき、力のモーメントのバランスは、

$$aE = (D - a)M \tag{1}$$

と書けます。D は大凡地球の半径 R の 60 倍、(D/R=60)、E は M の 81 倍 $(E/M = 81)$ であるので、

$$a = \frac{3}{4}R \tag{2}$$

であることがわかります。即ち、共通重心は地球の中心から半径の 3/4 である地球内部に存在します。

1.2 起潮力

月の公転は、地球と月が共通重心を中心に回ることで実現しています。では次に、その公転運動がどの様に海面を押し上げたり押し下げたりしているのかを調べます。そのためにまず、ポテンシャルという物理量を導入しましょう。ポテンシャルとは、それを任意の方向に沿って微分してマイナス符号をつけると、その方向にはたらく力を表すという性質があります。即ち、ポテンシャルを Ω とおき微分方向にはたらく力を F_x とおくと、以下が成り立ちます。

$$-\frac{\partial \Omega}{\partial x} = F_x \tag{3}$$

圧力とポテンシャル

海に潜ったとき、潜った深さが深いほど圧力を強く体に受けることは、海で泳いだことがある方なら誰でも経験したはずです。これは、ある水深の圧力が、ほぼその深さの上にある海水の重さで決められているためです (このときの圧力を静水圧と呼ぶ)。ある深さの静水圧 p は、

$$p(z_1) = -\int_{z_1}^{0} \rho g dz + p_0 \tag{4}$$

と書け、ここで ρ は海水密度で、g は重力加速度、p_0 は大気圧です。
ところで、話は少し変わって満員電車を思い出しましょう。満員電車に乗っているとします。今、満員電車に沢山の人が車両入り口から押し寄せています。入り口付近では、沢山の人が押し合い「圧力」が大きくなります。このため、「圧力」の大きい入り口付近から”圧力”の比較的低い車両中程に向けて力がはたらき、その力に押されて、人が中央へ動かされます。即ち、「圧力」の違いによって生じる力は「圧力」の高い方から低い方へはたらきます。実際の圧力でもこれは同じです。今、(4) を z について偏微分してみると、

$$\frac{\partial p}{\partial z} = -\rho g \tag{5}$$

となります。この時右辺は、単位体積辺りの海水にはたらく下向きの重力で、左辺は水圧の鉛直勾配となっており、圧力に流体体積をかけた Vp がポテンシャルに相当する物理量であることが分かります。言い換えれば、鉛直方向の静水圧の圧力勾配にともなう力は、流体自身にかかる重力と釣り合っているということになります。

では、潮汐をつくる力のポテンシャルはどの様に記述できるのでしょうか。

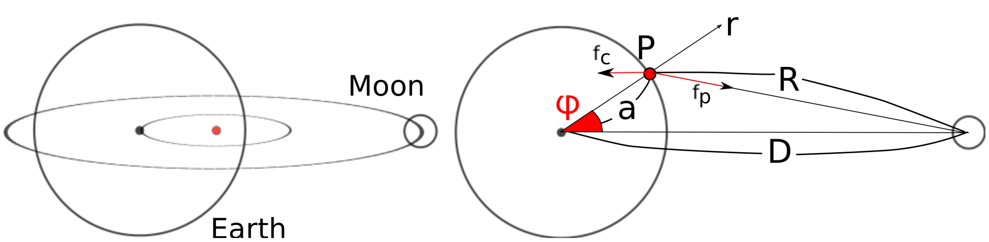


Figure 1: 左図：地球と月の公転運動。右図：地球と月の模式図

図 (25) は、地球と月の公転運動の模式図を左図に示し、右図は、これから用いる各記号の説明用の図です。まず、潮汐に重要な力は月の引力です。図 (25) の点 P にはたらく月の引力 f_p は、

$$f_p = k\frac{M}{R^2} \tag{6}$$

ここで、M は月の質量、R は点 P と月との距離、$k = ga^2/E$ は重力定数です。(ここで E は地球の質量、g は重力加速度、a は地球の半径です。)　また、図中の D は地球中心と月との距離で、ϕ は点 P が月の公転面と成す角です。

公転する地球上にある海水にとってみれば、見かけの力である、公転の遠心力を考えなければなりません。遠心力 f_c は公転する地球の何処でも同じ大きさで、

$$f_c = -k\frac{M}{D^2} \tag{7}$$

一定です。簡単のために、地球が自転していない場合を考えます。月と地球が共通重心の周りを一回転する間に地球中心がとる軌跡と、日本にいる我々がとる軌跡は、半径が等しい同一軌道になります。ただこれらの水平的な位置が平行移動されたものとなっています。詳しくはこの動画を参考にしましょう。

即ち、地球上のすべての点にある物体にかかる同一の遠心力は、地球中心にかかる月の引力とは反対向きで同じ大きさということになります。

では夫々の力のポテンシャルを求めましょう。まず月の引力 f_p については、f_p のポテンシャル Ω_p の r についての微分が

$$-\frac{d\Omega_p}{dR} = k\frac{M}{R^2} \tag{8}$$

を満たすことから、

$$\Omega_p = -k\frac{M}{R} \tag{9}$$

の形にかけることが分かります。積分定数は、実際の力を求める微分によって消えてしまいますので書かなくても良いわけです。一方、遠心力 f_c につい

ては、地球中心と月の中心あるいは共通重心を結ぶ線に平行にはたらきますので、その方向を x とすれば、

$$\Omega_c = k\frac{M}{D^2}x \tag{10}$$

と書けます。ところで、このポテンシャルは地球の半径と公転面からの緯度で表す方が便利です。従って、$x = r\cos(\phi)$ を用いて、

$$\Omega_c = k\frac{M}{D^2}r\cos\phi \tag{11}$$

と書けます。従って、起潮力ポテンシャルは、Ω_p と Ω_c の和算で表されます。それらを各ポテンシャルの等値線を描いて図示してみましょう。

総ポテンシャル Ω は、

$$\Omega = -k\frac{M}{R} + k\frac{M}{D^2}r\cos\phi \tag{12}$$

となります。しかしながら、(12) に含まれる R は、地球上の各点から月までの距離であるため、地球の情報とほぼ定数である地球中心と月中心との距離で置き換えることが出来れば更に便利です。そこで、$1/R$ を三角形の法則から以下の様に書けるけることを利用します。

$$\frac{1}{R} = \frac{1}{D\sqrt{1+(\frac{r}{D})^2 - 2(\frac{r}{D})\cos\phi}} \tag{13}$$

今、$y = (r/D)^2 - 2(r/D)\cos\phi$ とおくと、$1/R = 1/\sqrt{1+y}$ となります。$r/D \ll 1$ であり、$|y| < 1$ であるので、これをマクローリン展開してみます。

マクローリン展開

関数 $f(x)$ があるとき、以下の様にマクローリン展開できることが知られる。

$$f(x) = f(0) + xf'(0) + \frac{x^2}{2!}f''(0) + \frac{x^3}{3!}f'''(0) + \cdots \tag{14}$$

すると、$1/R$ は、大凡以下の様に書けます。

$$\frac{1}{R} = \frac{1}{D}\left[1 - \frac{1}{2}\left(\frac{r}{D}\right)^2 + \left(\frac{r}{D}\right)\cos(\phi) + \frac{3}{2}\left(\frac{r}{D}\right)^3\cos^2(\phi)\right] \tag{15}$$

ここで$(r/D) \ll 1$であるので、$(r/D)^3$や$(r/D)^4$等の高次項を省略しました。この$1/R$、地球中心からの距離rと公転面からの角度ϕを用いて、起潮力ポテンシャルは、

$$\Omega = -\frac{kMr^2}{2D^3}\left(3\cos^2\phi - 1\right) \tag{16}$$

と書けます。ここで、rとϕで微分して0になる項は、起潮力には影響を及ぼさないため予め削除してあります。

次に、この起潮力ポテンシャルから、起潮力の大きさの程度を調べてみましょう。$\partial(16)/\partial r$の程度は、地球上の点を仮定し、$r = a$とし、単純に、

$$f_{tidal} \sim g\frac{M}{E}\left(\frac{a}{D}\right)^3 \tag{17}$$

と見積もることができます。これに実際のMやE、a、Dの大きさを表(1)から代入してみましょう。すると、その大きさは、$10^{-7}g$ $[\mathrm{m^2s^{-1}}]$であることが導かれます。即ち、地球の重力の1000万倍程度小さいということになります。このことは、鉛直方向には、重力に比して起潮力は無視できることを暗示します。しかしながら、水平方向については、これと同時に作用している力は無いため[1]、水平方向の起潮力は無視できない力であると言えます。地球上の点における水平方向の起潮力は、(17)を接線方向に偏微分することで得ることが出来ます。極座標における接線方向の偏微分は、$(1/a)\partial/\partial\phi$であるので、水平方向の起潮力$f_h$は、

$$f_h = \frac{3g}{2}\frac{M}{E}\left(\frac{a}{D}\right)^3 \sin 2\phi \tag{18}$$

となります。

1.3 平衡潮汐

月の引力と海水粒子にはたらく月の公転による遠心力によって、起潮力がつくられることが分かりました。また、起潮力のうち、水平方向成分の起潮力が実際に海面変動を引き起こすのに重要であることがわかりました。このこ

[1]実際には、地球上の海水には、地球自転のための遠心力がかかることになるが、遠心力によって地球自体が楕円形となり、その効果は真の重力と地球自転の遠心力との合力を重力と呼ぶことで運動方程式には含まれない。

とは、潮汐の結果として現れる海面の上下運動が鉛直軸に沿って起こっている点から考えて、驚くべきことです。実際に潮が引くときには、海水が水平方向にはたらく起潮力によって横に引っ張られている訳です。今、地球と月が公転しているある瞬間の海面の変化に関して調べてみましょう。ある瞬間では、潮汐による海面の凹凸に伴う圧力傾度力が起潮力と静力学的にバランスしています。そのバランスは、地球上の座標系で水平方向を s とすると、

$$0 = -\frac{\partial \Omega}{\partial s} - \frac{1}{\rho}\frac{\partial p}{\partial s} \tag{19}$$

と書けます。ここで、海面の水圧 p_s は、(4) で密度 ρ を一様と仮定すると、$p_s = \rho g \overline{\eta}$ と書けます。ここで、η は、海面の基準面 $z = 0$ からの変位です。従って、右辺第二項の圧力傾度力は、$-1/\rho \partial p/\partial s = -g\partial\overline{\eta}/\partial s$ と書けます。即ち、

$$g\frac{\partial \overline{\eta}}{\partial s} = -\frac{\partial \Omega}{\partial s} \tag{20}$$

となり、これを s について積分すると、$\overline{\eta}$ を積分すると $z = 0$ となるはずであるので、積分定数が消え、

$$\overline{\eta} = -\frac{\Omega}{g} = \frac{1}{2}\left(\frac{M}{E}\right)\frac{a^4}{D^3}\left(3\cos^2\phi - 1\right) \tag{21}$$

となります。これを図示すると図 (2) の様になります。

さて、これまで地球の自転は考えてきませんでしたが、実際には地球は自転しています。月の公転周期が 27 日余りであるのに対し、地球の自転周期は 1 日です。このため、平衡潮汐が実際の潮位であるとすると、1 日のうちに干潮と満潮は 2 回ずつ存在しうることになります。しかしもう一つ忘れてならないことがあります。それは地軸が傾いていることです。地軸が傾いていることで、月の公転面と自転軸は垂直ではないため、ある地点における干満の変動が 1 日のうちに異なるということが起こりえます。これは日潮不等と呼ばれます。月が赤道上を運行する場合は、この日潮不等は理論上起こらないことになります。平衡潮汐による干満の最大の差は、平衡潮汐 (21) で $\phi = 0$ と $\pi/2$ の時の差を求めることで得られます。

$$\delta\overline{\eta} = -\frac{\Omega}{g} = \frac{3}{2}\left(\frac{M}{E}\right)\frac{a^4}{D^3} \tag{22}$$

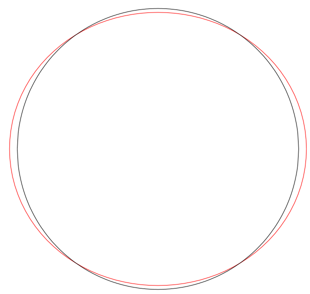


Figure 2: $\phi = 0$ のときの平衡潮汐の模式図。実際の変位を誇張して描いています。

クイズ

$\delta\eta$ は、いくつになるでしょうか。

この平衡潮汐を模式的に表した動画はここから見ることが出来ます。

1.4 太陽による潮汐

これまで月による潮汐について学びましたが、地球が公転する恒星、太陽の引力に伴う潮汐も存在します。このため月による潮汐は、太陰潮と呼び、太陽による潮汐を太陽潮と呼び区別します。月のときと同様、地球が太陽の周りを公転する際には、太陽と地球の共通重心の周りを公転しますが、太陽の質量が圧倒的に大きいため、ほぼ太陽の中心を回っていると考えます。

クイズ

太陽による干満の差を月のときに習って、(22) の M を太陽の質量に、D を太陽と地球の距離に置き換えて計算してみましょう。いくらになりますか？ その結果から太陽と月どちらが地球の潮汐により強く影響を及ぼしているのでしょうか。授業中に考えてみましょう。

さて、月と太陽が同時に地球の潮汐に寄与している事が判りましたが、地球は自転と公転、月との公転を同時に行っています。このため、月の位置と太陽の位置の兼ね合いで、総合して起潮力が変動します。これは、皆さんも良く耳にする、大潮 (Spring Tide) や小潮 (Neap Tide) を生じさせています。実際の潮位変動をグラフにしたものを以下に示します。

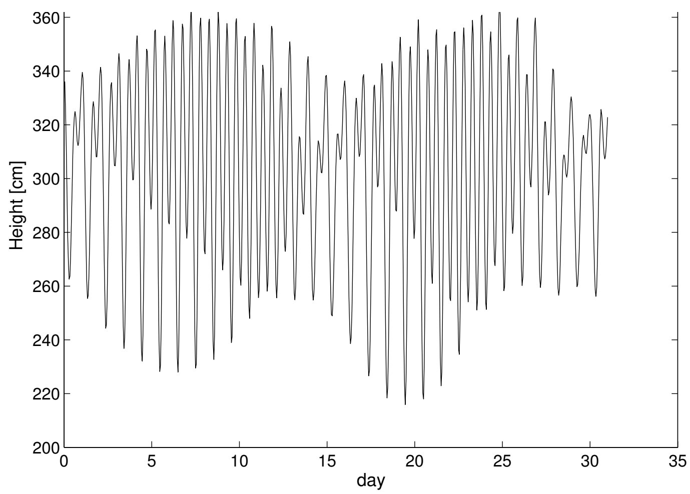


Figure 3: 勝浦における潮位変動の例

> クイズ
>
> 図のように、2 週間程度の周期の大潮と小潮のサイクルをはっきりと見る事が出来ます。これは、月が 27 日余りで公転しているためですが、では、太陽と月がどのような位置にあった場合大潮と小潮が発生するのでしょうか。考えてみましょう。

1.5 潮汐の波は"浅い波"

平衡潮汐は、惑星規模ではたらく起潮力、とくに水平成分の起潮力によって生じており、その大体の振幅の大きさについても学びました。月や太陽によって作られる海面の凹凸を、地球が自転する事である点では、大凡 2 度の干潮と満潮を迎える事も分かりました。惑星規模の起潮力に伴う潮汐の波は、従って、波長 λ が海洋の水深 H に比べて極めて大きく、このような波を" 浅海波" と呼びます。ここでは、この浅海波の性質について学びましょう。

今密度が ρ で一定の海水を想定し、2 次元空間 $x-z$ 面に伝播する波を考えましょう。この流れは y 方向には、変化せず、体積を考慮する際は、流れの厚さが y 方向には単位長さであるとします。この運動を記述する運動方程式 $Ma=F$ は、x と y 方向夫々について、

$$\rho\frac{\partial u}{\partial t} = -\frac{\partial p}{\partial x} \tag{23}$$
$$0 = -\frac{\partial p}{\partial z} - \rho g$$

これらの式は、つまり、海水の水平加速度は、水平方向の圧力傾度力だけに依存し、鉛直方向の加速度運動は無視できるほど小さいことを意味しています。ちなみに z 方向の式は静水圧の式です。これで $x-z$ 面の運動を記述する式を立てる事が出来ました。次は、海水の質量の保存についての式を考えましょう。

1.5.1 質量の保存、連続の式

今、$x-z$ 面で正方形で厚さが y 方向には単位長さである仮想的な箱を考えます。この箱の体積 δ_V は従って、$\delta x \cdot 1 \cdot \delta z$ と書け、この仮想的な箱は面を通した水の流入を妨げることはありませんし、従って体積が変わる事もありません。面 A を通した $x=x$ での単位時間当たりの質量流入と、面 B を通した $x=x+\delta x$ における流出は、それぞれ以下の様にテイラー展開を用いて書く事が出来ます。

$$\begin{aligned} x \quad &: \quad (\rho u)_{x,z}\,\delta z \cdot 1 \qquad\qquad (24) \\ x+\delta x \quad &: \quad (\rho u)_{x+\delta x,z}\,\delta z \cdot 1 = \left[(\rho u)_{x,z} + \frac{\partial \rho u}{\partial x}\delta x + \frac{1}{2}\frac{\partial^2 \rho u}{\partial x^2}\delta x^2 + \cdots\right]\delta z \cdot 1 \end{aligned}$$

したがってどれほど単位時間で箱の中に質量が溜まったかを考えるには、上式から下式を差し引けば良く、これと同じ事を x 方向にも行って、左辺に質量の変化をおいた式を立てると、

$$\delta V\frac{\partial \rho}{\partial t} = -\frac{\partial \rho u}{\partial x}\delta x \cdot 1 \cdot \delta z - \frac{\partial \rho w}{\partial z}\delta x \cdot 1 \cdot \delta z + \text{高次の項} \tag{25}$$

となります。したがって、この立方体の体積 δV を限りなく 0 に近づければ高次の項が消え、質量の保存は、

$$\begin{aligned} \frac{\partial \rho}{\partial t} &= -\frac{\partial \rho u}{\partial x} - \frac{\partial \rho w}{\partial z} \qquad\qquad (26) \\ \frac{\partial \rho}{\partial t} &= -u\frac{\partial \rho}{\partial x} - w\frac{\partial \rho}{\partial z} - \rho\left(\frac{\partial \rho u}{\partial x} + \frac{\partial \rho w}{\partial z}\right) \end{aligned}$$

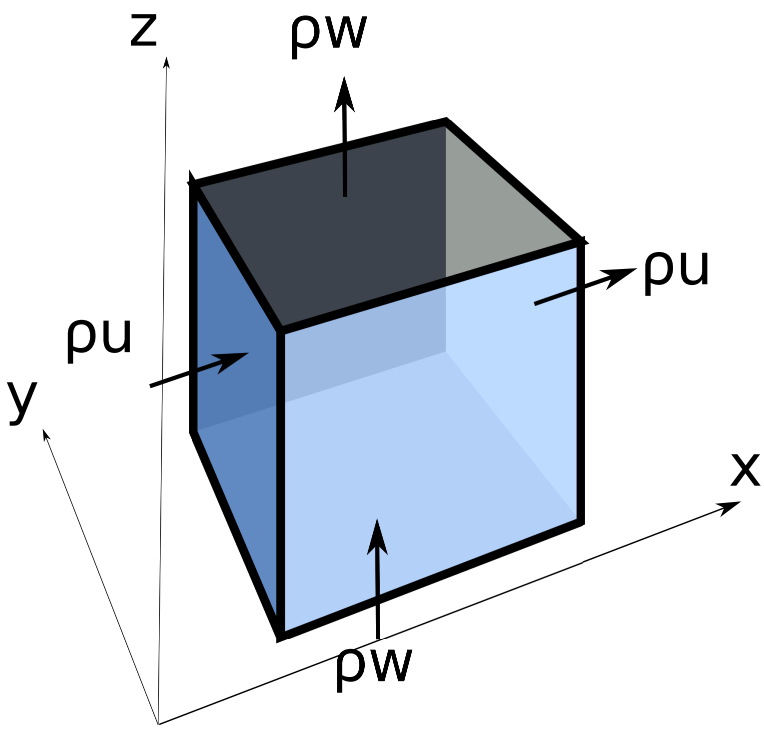


Figure 4: 箱の中の流体の質量保存

となります。今仮に、

$$\frac{D\rho}{Dt} = \frac{\partial \rho}{\partial t} + u\frac{\partial \rho}{\partial x} + w\frac{\partial \rho}{\partial z} = 0 \tag{27}$$

であれば、質量保存は以下の様に簡単に書く事が出来ます。

$$\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial w}{\partial z} = 0 \tag{28}$$

(27) とはどういう意味でしょう。この (27) 左辺 $D\rho/Dt$ のことを、密度 ρ に関する物質微分 (Material Derivative または、Substantial Derivative、あるいは Particle Derivative) と呼びます。今、２次元の海面に広がる海面水温の

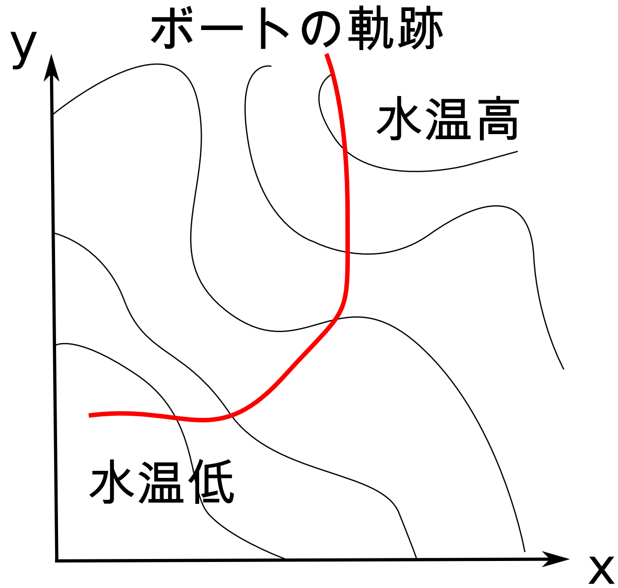


Figure 5: 海面水温とボートの軌跡模式図。黒線は等温線を示す。

場を仮定しましょう。海面水温は x と y と時間 t の関数 $T(x,y,t)$ であると仮定します。

この水温の場を小さなボートである微小な距離 dx と dy を微小な時間 dt の間に移動したとき、移動による水温の変化 dT は、以下のように書けるはずです。すなわち、

$$dT = \frac{\partial T}{\partial t}dt + \frac{\partial T}{\partial x}dx + \frac{\partial T}{\partial y}dy \tag{29}$$

この移動 dx や dy は、dt の間に起こったので、その移動速度を用いて、$dx = udt$、$dy = vdt$ と書けるので、これらを (29) に代入すると、

$$\frac{dT}{dt} = \frac{\partial T}{\partial t} + u\frac{\partial T}{\partial x} + v\frac{\partial T}{\partial y} \tag{30}$$

となる。左辺は、このボートが動きながら経験する水温の変化を総合して表しており、(i) 右辺第一項のボートがある瞬間に通る点におけるその場の水温の時間変化と、(ii) 第二項の水温の x 方向の勾配中を速度 u で x 方向に進む事による水温変化、(iii) 第三項の速度 v で y 方向に水温の y についての勾配中を進む事による水温変化を足し合わせたものである。さて次はこのボートを

流体のある体積を占める一部分の流体粒子であると仮定しよう。この場合、流体粒子が動くとき、その水温の性質を持って流体自身が移動することになる。もし、その流体粒子を追跡して温度変化が全くない場合、(30) の左辺が 0 であるので、右辺第一項に関する式に書き換えると、

$$\frac{\partial T}{\partial t} = -u\frac{\partial T}{\partial x} - v\frac{\partial T}{\partial y} \tag{31}$$

となります。この式 (31) は、ある任意の場所に固定した点における水温の変化は、動いている流体粒子がその場所に運んでくる水温がその地点の水温と著しく違っていればいるほど、また流体粒子の流速が速ければ速いほど、大きい事を示しています。このため右辺の項は移流項と呼ばれます。つまり、流体粒子を追いかけて水温が変化しない場合 ($DT/Dt = 0$) は、その流体粒子が流れによって何処にどのように運ばれるかのみで、各場所の水温が変化するということで、実は非常に簡単な事を言っています。このように流体粒子の運動を追いかけてその時間変化を表すとき、d/dt と書くのではなく、D/Dt と書き、対象とする関数 (例えば水温) が時間のみの関数であると言う意味ではなく、流体粒子を追いかけた微分（物質微分）である事を明示します。話を流体の密度に戻しましょう。(27) はすなわち、流体粒子を追いかけてその密度 ρ に変化が無い事を意味します。すなわち流体粒子が流れによって深い深海へ潜っても圧縮によって密度が変化しない事を意味し、暖められて膨張したりしないことを意味する。したがって (27) は非圧縮の仮定と呼ばれます (しかし実際は海水は少し圧縮性があります)。ちなみに各場所に固定して、水温等の物理量の変化をみる考え方をオイラー流といい、一方流体粒子を追跡してその変化を見る考え方をラグランジュ流とよびます。

　話を浅海波にもどしましょう。以上の事から、$x-z$ 面における密度一様で非圧縮、粘性や地球自転効果の無視できる海水の運動方程式と質量保存の式は、

$$\rho\frac{\partial u}{\partial t} = -\frac{\partial p}{\partial x} \tag{32}$$

$$0 = -\frac{\partial p}{\partial z} - \rho g \tag{33}$$

$$\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial w}{\partial z} = 0 \tag{34}$$

　また、図の様に、ここで扱う浅海波に伴う海面の変位を η とおくと、任意の水深での圧力は、以下の様に書けます。

$$p = -\rho g(z+\eta) + p_o \tag{35}$$

ここで p_o は大気圧で一定と考えます。(35) を (33) に代入し、整理すると、

$$\frac{\partial u}{\partial t} = -g\frac{\partial \eta}{\partial x} \tag{36}$$

となります。また、(34) を鉛直方向に水平な海底 $z = -h$ から海面 $z = \eta$ 積分すると、

$$\int_{-} h^{\eta}\frac{\partial u}{\partial x}dz + \int_{-} h^{\eta}\frac{\partial w}{\partial z}dz = \frac{\partial u}{\partial x}\left[z\right]_{-h}^{\eta} + \left[w\right]_{-h}^{\eta} = 0 \tag{37}$$

となり、w は海底が水へであるため $z = -h$ で 0 であること、$z = \eta$ では $w = d\eta/dt = \partial\eta/\partial t + u\partial\eta/\partial x$ であることを考慮し整理すると、

$$\eta\frac{\partial u}{\partial x} + h\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial \eta}{\partial t} + u\frac{\partial \eta}{\partial x} = 0 \tag{38}$$

とかけますが、第一項は、水深に比して微小振幅である波の場合 $h \gg \eta$ 省略でき、また、最後の項は波長の長い浅海波の微小振幅の空間勾配に波による流速をかけた非線形項であるので、一般的に他の項よりも小さいため省略できます。したがって、式 (38) は、

$$h\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial \eta}{\partial t} = 0 \tag{39}$$

となります。また、(39) を時間で偏微分して (36) を x での偏微分し、

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial t}(39): \quad & \frac{\partial^2 \eta}{\partial t^2} = -h\frac{\partial^2 u}{\partial x \partial t} \\ \frac{\partial}{\partial x}(36): \quad & \frac{\partial^2 u}{\partial t \partial x} = -g\frac{\partial^2 \eta}{\partial x^2} \\ & \frac{\partial^2 \eta}{\partial t^2} = gh\frac{\partial^2 \eta}{\partial x^2} \end{aligned} \tag{40}$$

u に関する項を削除すると、

$$\frac{\partial^2 \eta}{\partial t^2} = gh\frac{\partial^2 \eta}{\partial x^2} \tag{41}$$

という浅海波の運動と質量保存を同時に表す式を導く事が出来ます。この式は、1次元の波動方程式と呼ばれる波の伝播を表す式です。1次元の波動方程式は以下の様な一般解を持つ事が知られています。

1 次元波動方程式の解

次の 1 次元波動方程式を考えましょう。

$$\frac{\partial^2 \eta}{\partial t^2} = C^2 \frac{\partial^2 \eta}{\partial x^2} \tag{42}$$

いま η は時間 t と空間 x の関数として定義されていますが、これとは別に次の変数の関数として定義し直す事を考えましょう。それらは、$\xi = x + Ct$、$\psi = x - Ct$ で ξ も ψ も x と t の関数です。従って、η の 1 階と 2 階の偏微分はそれぞれ以下の関係を満たすはずです。

$$\begin{aligned}
\frac{\partial \eta}{\partial x} &= \frac{\partial \eta}{\partial \xi}\frac{\partial \xi}{\partial x} + \frac{\partial \eta}{\partial \psi}\frac{\partial \psi}{\partial x} = \frac{\partial \eta}{\partial \xi} + \frac{\partial \eta}{\partial \psi} \qquad (43)\\
\frac{\partial \eta}{\partial t} &= \frac{\partial \eta}{\partial \xi}\frac{\partial \xi}{\partial t} + \frac{\partial \eta}{\partial \psi}\frac{\partial \psi}{\partial t} = C\frac{\partial \eta}{\partial \xi} - C\frac{\partial \eta}{\partial \psi}\\
\frac{\partial^2 \eta}{\partial x^2} &= \frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial \eta}{\partial \xi} + \frac{\partial \eta}{\partial \psi}\right) = \frac{\partial^2 \eta}{\partial \xi^2} + 2\frac{\partial^2 \eta}{\partial \xi \partial \psi} + \frac{\partial^2 \eta}{\partial \psi^2}\\
\frac{\partial^2 \eta}{\partial t^2} &= \frac{\partial}{\partial t}\left(C\frac{\partial \eta}{\partial \xi} - C\frac{\partial \eta}{\partial \psi}\right) = C^2\frac{\partial^2 \eta}{\partial \xi^2} - 2C^2\frac{\partial^2 \eta}{\partial \xi \partial \psi} + C^2\frac{\partial^2 \eta}{\partial \psi^2}
\end{aligned}$$

これらを (42) に代入して整理すると、1 次元は同方程式は以下のより簡単な式に書く事が出来ます。

$$\frac{\partial^2 \eta}{\partial \xi \partial \psi} = 0 \tag{44}$$

したがって、これを ψ について積分すると、

$$\int \frac{\partial^2 \eta}{\partial \xi \partial \psi} d\psi = 0 \quad \rightarrow \quad \frac{\partial \eta}{\partial \xi} = \phi(\xi) \tag{45}$$

となり $\phi(\xi)$ は ξ のみの任意関数です。また、もう一度 ξ について積分すると、

$$\int \frac{\partial \eta}{\partial \xi} d\xi = \eta = f_1(\psi) + f_2(\xi) \tag{46}$$

となります。元の座標に戻してやれば、η の一般解は、

$$\eta = f_1(x - Ct) + f_2(x + Ct) \tag{47}$$

となります。

この一般解の物理的な意味は、例えば f_1 が 2 次関数の形を空間についてとっているとした場合、即ち $f_1 = (x - Ct)^2$、$t = 0$ では $f_1 = x^2$ でこの関数は最小値が原点と等しくなりますが、時間 δt 後には、距離 $C\delta t$ だけ右に進み、最小値は $x = C\delta t$ で x 軸と接するはずです。逆に $f_2 = (x + Ct)^2$ で定義されるもう片方の解は、時間 δt 後には、距離 $C\delta t$ だけ左に進みます。つまりこの一般解は、関数が $t = 0$ でとった波の形が、左右に伝播速度 C で伝播することを意味しています。このことから、浅海波を対称に導いた 1 次元の波動方程式中 (41) の gh は (42) の C^2 に相当し、波速の 2 乗である事が分かります。即ち、浅海波の波の進むスピード C の大きさは

$$|C| = \sqrt{gh} \tag{48}$$

となります。

1.6 潮汐の実際

しかしながら、静力学的なバランスを考慮しただけの平衡潮汐は、実際の潮汐を正しく表さないことが知られています。これは、潮汐が、静力学的な現象ではなく、動力学的な現象であることを暗示しています。

クイズ

例えば、海洋の平均水深は 4000 m ですが、次章で取り扱う潮汐波などの長波が伝わる速度は、水深 H と重力加速度 g の関数として、$\sqrt{gH}$ と簡単に書けることが知られています。つまり平均的に潮汐は 200 ms^{-1} 程度で伝播しますが、平衡潮汐による海面の盛り上がりが地球を 24 時間で 1 周するのに何時間必要でしょうか。このことは、2 回干潮と満潮が観測されることと照らし合わせて整合性はありますか？ 授業中に考えてみましょう。

　このように、実際の潮汐は平衡潮汐とはかなり異なっています。その典型的な例は、平衡潮汐では、月が真上あるいは真下にあるときに満潮を迎えますが、実際には、月を真上に見た後、月が水平線付近にさしかかったときに満潮を迎えることもあります。これには、地球の自転に伴う海底の摩擦が関係しています。即ち、月の公転速度よりも 30 倍弱速く自転する地球に海水が引きずられている分、平衡潮汐よりも先行して実際の潮汐が起こる傾向にあるということです。蛇足ですが、この海底の摩擦による潮位のずれは、さらに月の引力の影響で地球の自転速度を段々と遅くしています。もしずっとこの自転速度低下が続くとすると $2{\times}10^9$ 年後には地球の自転速度は、月の公転角速度と同一となり、地球のある一側面からしか月は見えなくなってしま

います。実際には、その前に太陽活動の変化によって地球の海洋は蒸発してしまう様ですが・・・。この自転の低下は、実は地球ではなく月で地球の引力によって起こった様です。今私たちが見る月は、実際月の一面だけで、月の裏側を見る事がありません。言い換えれば月の裏側から地球を見る事は出来ないのです。これは、長い年月をかけて地球の引力に伴う月面の潮汐が月の自転速度を低下させ、ついには、月の自転速度と公転速度が同一になったためだと考えられています。実際の潮位を模式的に示した動画が以下から見られます。詳しくはこの動画を参考にしましょう。

また、沿岸域では、岸や湾が存在することで潮位変動は平衡潮汐のそれと大きくずれています。このため、実際の潮汐の予報では、ある地点の長期間にわたるデータを分析して、観測データを様々な周期の波動の集合体として取り扱い、各周期の波動の振幅と遅角を求めて行われています。

主な潮汐の種類は、以下のものがあります。

記号	名前	周期 (時間)
M_2	主太陰半日周潮	12.42
S_2	主太陽半日周潮	12.00
N_2	主太陰楕円潮	12.66
K_2	日月合成半日周潮	11.97
K_1	日月合成日周潮	23.93
O_1	主太陰日周潮	25.82
P_1	主太陽日周潮	24.07
Q_1	主太陰楕円潮	26.87
S_1	気象日周潮	24.00

Table 2: 主要な潮汐

この内一番卓越する M_2 分潮の伝搬の様子をこののリンクから見ることが出来ます。

1.7 潮汐のパワー

月と太陽が主要な潮汐の原因であり、それがどのように、どの程度の潮位変動を引き起こすかを学びました。さて、それではこの潮汐が海洋にどのくらいのエネルギーを単位時間あたりに与えているのでしょうか。パワーとは電力で良く用いられる単位ワットで表される、単位時間あたりに与えられるエネルギーです [Js^{-1}]。

現代の日本の原発は1基約100万kWの発電能力を有すると言われています。これはすなわち、10^9 Wということになります。一方月と太陽が地球に生じさせ得る潮汐のエネルギー添加率は、3.7 TWです。この内、3.2TWが月の潮汐によります(図8)。TWは10^{12}Wであるので、単純計算で、原発4000基分のパワーが潮汐によって地球に与えられている計算になります。

この地球の潮汐を駆動するパワーの内、個体地球の潮汐に0.2TW、大気の潮汐に0.02TW使われています。残りの3.5TW程度が海洋の潮汐を駆動する事になります。どれくらいの潮汐パワーが深海の混合に寄与しているかは、大変重要な海洋物理学的設問として長い間多くの研究が行われています。なぜなら、もし深海での混合現象が無ければ、極薄い表層の暖かい層以外は、数1000年のうちに海洋は冷たい極域で冷やされた海水に覆われてしまうからです。現実の海洋では、永年水温躍層は比較的緩やかな成層を形成しています。この緩やかな成層の形成に風による内部波や、潮汐に伴う深海での混合現象が寄与しているであろうと推測されています。

非常に長い(数1000年)という時間をかけて、海水は海洋全体を循環しています。比較的早い表層の循環は風によって駆動されていますが、深層の循環は熱と塩によって駆動されています。その循環の様式を模式的に示したのが下の図です。海水は極域で作られ、沈み込み最終的に北太平洋に湧き上っ

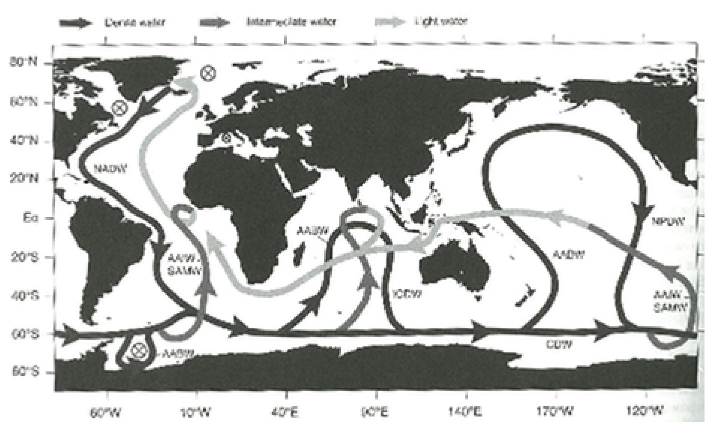


Figure 6: (Sarmiento and Gruber 2007 より)

ているということが推定されています。このことから、Munk (1996) は北太

平洋の水温や塩分の鉛直構造が、上向きの平均湧昇流と下向きの混合フラックスとのバランスで形成されていると考えました。即ち、

$$w\frac{\partial T}{\partial z} = K_\rho \frac{\partial^2 T}{\partial z^2} \tag{49}$$

ここで w は平均湧昇流を示し、K_ρ は乱流に伴う乱流渦拡散係数です。Munk (1996) は、北太平洋の水温の鉛直構造を平均して指数関数 $T = T_o e^{z/d}$ で表すことを試みました。また、平均湧昇速度おを深層水の形成率から、大凡 1.4×10^7 ms^{-1} と見積もりました。指数関数の水温構造を (49) に代入すると、

$$K_\rho = dw \tag{50}$$

を得ます。d は曲線近似から 930 m と見積もられました。このことから、K_ρ は 1.3×10^{-4} m^{2}s^{-1} と計算できます。それでは実際の K_ρ はどの程度だったのでしょうか。平均した深海の渦拡散係数は、実測値から見積もった場合 Munk の提唱した値から 10 分の 1 程度で 1×10^{-5} m^{2}s^{-1} と見積もられています。では、どうやって深海の密度構造が維持されているのでしょうか。Polzin et al. (1997) や Naveira Garabato et al. (2004) らによれば、ごく限られた領域ではあるが、海底に起伏がある時、渦拡散係数は大きくなり、ところによっては 1×10^{-4} 10^{-5} m^{2}s^{-1} を上回ることが明らかになりました。この様な局所的な深海の混合が、海洋の深海密度構造を維持するのに不可欠であると考えられています。また、このような海底の起伏での混合には潮汐流が大変重要です。 比較的近年、Munk and Wunsch (1998) らは、潮汐のパワーがどの様に海洋に分配されるかを見積もりました。それでは、その研究でどのようにどの程度の潮汐のパワーが深海へ添加されうるか考えられているのか見てみましょう。海洋潮汐を駆動する 3.5TW のうち、大半の 2.6TW は、水深が浅い沿岸域の潮汐が浅い海底付近で数 m から数 mm の乱流混合のために散逸していると見積もられています。残りの 0.9TW が外洋域の潮汐を駆動し、その内幾らかが、内部潮汐の発生に費やされていると推定され、その内部潮汐の 0.2TW が海洋内部へ内部波として伝播し、海洋内部で 0.2TW が散逸していると考えられています。また、それ以外の 0.7TW は内部潮汐のうち、それらが捕捉されやすい海域へ捕捉されたり、順圧で上下層に流速差のない潮汐波動が何らかの要因で捕捉されて乱流混合に散逸していると推定されています。総じて、2.1TW が深海の密度構造の維持のために必要であると考えられています。そのうち、1.2TW は海上風によって引き起こされる内部波が深海まで伝播する事で供給されていると考えられていますが、実際に

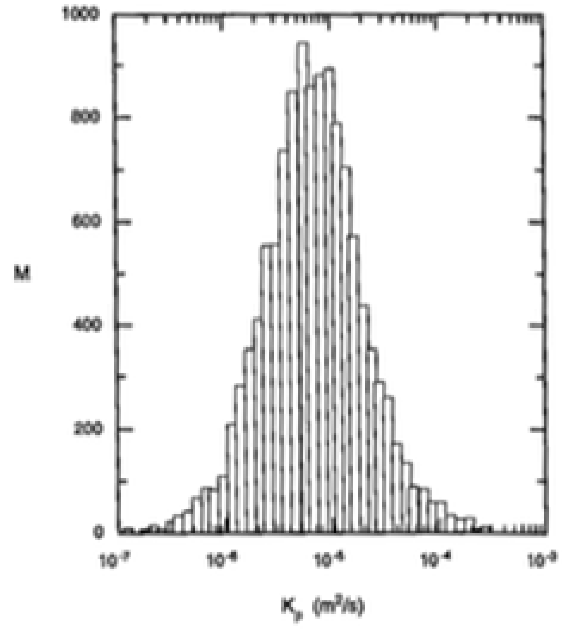


Figure 7: (Kunze and Sanford 1996 より)

それを見積もった研究では、1.2TW ものパワーは風から深海へ到達していないとも報告しています。したがって、深海の密度構造が如何に維持されているかは現在のところ完全に理解されている訳ではありません。

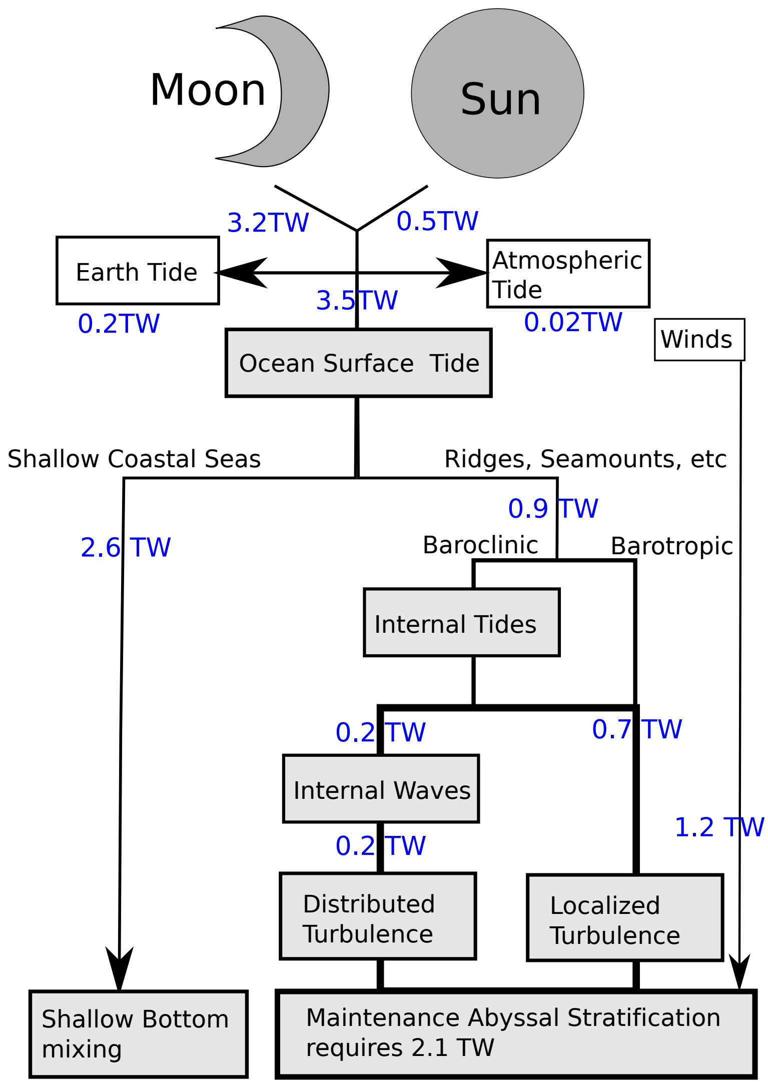


Figure 8: 推定された潮汐パワー伝達経路 (Munk and Wunsch 1998 より)

1.8 潮汐の測定

潮汐の測定は、験潮儀を用いて行います。験潮儀には以下の3つの種類があります。

- フロート式 (フロートを海面に浮かべる)
- 水圧式 (水圧計を海底に沈める)
- 超音波式式 (海上から音波を水面に発する)

前述したとおり実際の潮汐は平衡潮汐とは大幅に異なるため、

$$\eta(t) = \Sigma_i \underbrace{H_i}_{amplitude of ith tidal constituents} \cos\left(\underbrace{\frac{2\pi t}{T_i}}_{period for i} + \underbrace{u_i}_{phase} - \underbrace{k_i}_{phase delay}\right) \quad (51)$$

として沢山の波の和として考え、その予測は各観測所で得られたデータを上式に当てはめて、各地のパラメータをフーリエ解析などを用いて行っています。

1.9 潮汐と人々

1.9.1 日本の海賊と潮汐

瀬戸内海に、平安時代から鎌倉時代、戦国時代にかけて村上水軍あるいは伊予水軍という武装勢力がいたのをご存知でしょうか。彼らは、当時瀬戸内海の中央部の制海権を掌握していたので、その海域を航行する船舶から通行税を取ったり、水先案内や船舶の警護を行っていました (柳 1988)。調査によると、村上水軍は少なくとも 12 分程度の精度で上げ潮と下げ潮の開始時刻を予測する独自の潮汐早見表を持っており、恐らくより詳細な海域の潮の流れを秘伝として書物に記す事無く伝承していたであろうということが推測されています (柳 1988)。

2 フーリエ解析

潮汐は平衡潮汐とは大幅に異なり、このため潮汐の予報は各観測所で得られたデータを元に経験的に行われることは既に述べました。その際にフーリエ解析を用いて、存在しうる天文潮成分の振幅や、位相、遅角を求める手法が取られることがあります。ここでは、フーリエ解析、スペクトル解析についてその基礎を学びましょう。

2.1 フーリエ級数

ある周期 2π の関数 $f(t)$ を sin や cos 関数の和で表す事を考えましょう。即ち、

$$f(t) = \frac{1}{2}a_0 + \sum_{n=1}^{\infty} a_n \cos nt + \sum_{n=1}^{\infty} b_n \sin nt \tag{52}$$

ここで、右辺第一項の $f(t) = a_0$ は一定値で、結果として得られる波を水平軸に対して移動させるオフセットで、第 2 項は、余弦波で表される周期関数、第 3 項は正弦波で表させる周期関数です。これらを足し合わせた波が $f(t)$ ということになります。逆に、なんとかして a_m(m は正の整数) を知る事が出来れば、それが $\cos mt$ の角振動数 (ラジアン/秒)m の波の振幅に相当しますので、その波の振幅の大きさを知る事が出来ます。これによって (??) で与えられる潮汐に伴う海面の変化の中で、知りたい周期或は周波数の波の寄与率を知る事が出来るわけです。

　試しに、(52) の $f(t)$ に $\cos mt$ をかけて 0–2π まで積分してみましょう。

$$\begin{aligned}\int_0^{2\pi} f(t)\cos mt\ dt &= \frac{1}{2}\int_0^{2\pi} a_0 \cos mt\ dt \\ &+ \int_0^{2\pi}\sum_{n=1}^{\infty} a_n \cos nt \cos mt\ dt + \int_0^{2\pi}\sum_{n=1}^{\infty} b_n \sin nt \cos mt\ dt\end{aligned} \tag{53}$$

積の公式

三角関数では以下が成り立つ。

$$\cos A\cos B = \frac{1}{2}\left[\cos(A+B)+\cos(A-B)\right] \tag{54}$$
$$\sin A\cos B = \frac{1}{2}\left[\sin(A+B)+\sin(A-B)\right]$$

上の公式 (54) を用いて、(53) を書き直すと、

$$\begin{aligned}\int_0^{2\pi} f(t)\cos mt\ dt &= \frac{1}{2}\int_0^{2\pi} a_0 \cos mt\ dt \\ &+ \frac{a_n}{2}\int_0^{2\pi}\sum_{n=1}^{\infty}\left[\cos(n+m)t+\cos(n-m)t\right]\ dt \\ &+ \frac{b_n}{2}\int_0^{2\pi}\sum_{n=1}^{\infty}\left[\sin(n+m)t+\sin(n-m)t\right]\ dt\end{aligned} \tag{55}$$

ここで、右辺第 2 項中の $\cos(n+m)t$ と第 3 項中の $\sin(n-m)t$ の積分について考えよう。n と m は正の整数であるので、$n+m$ は $2,3,4,5,\cdots$ と同じく 2 以上の整数となります。従って図の様に正弦波も余弦波もこれらを $0-2\pi$ で積分したらプラスとマイナス部分の面積は常に等しいため、積分値は正味 0 になることがわかります。加えて、右辺第 1 項についても余弦波の $0-2\pi$ の積分ですので同じく 0 になります。従って、

$$\int_0^{2\pi} \sum_{n=1}^{\infty} \cos nt \; dt = 0 \tag{56}$$
$$\int_0^{2\pi} \sum_{n=1}^{\infty} \cos(n+m)t \; dt = 0$$
$$\int_0^{2\pi} \sum_{n=1}^{\infty} \sin(n+m)t \; dt = 0$$

一方、$\cos(n-m)t$ や $\sin(n-m)t$ の項の積分はどの様になるでしょうか。$\sin(n-m)t$ について考えますと、仮に $n \neq m$ である場合は、$n-m$ は 0 以外の正負の整数になりますので、(57) と同様に積分値が 0 になります。また、$n = m$ である場合は $\sin 0 = 0$ の積分となってやはり 0 になります。一方、$\cos(n-m)t$ については、$n \neq m$ であるなら、同じく $n-m$ は 0 以外の正負の整数となりますので、やはり上と同じく $0-2\pi$ の積分値は 0 となることが容易に分かります。

$$\begin{aligned} \int_0^{2\pi} \sum_{n=1}^{\infty} \sin(n-m)t \; dt &= 0 \\ \int_0^{2\pi} \sum_{n=1}^{\infty} \cos(n-m)t \; dt &= 0 \quad (\text{もし } n \neq m \text{ なら}) \end{aligned} \tag{57}$$

しかし、仮に $n = m$ であるとすると、$\cos 0 = 1$ となりますので、積分値は 0 とはならず、

$$\begin{aligned} \int_0^{2\pi} \sum_{n=1}^{\infty} \cos(n-m)t \; dt &= \\ \int_0^{2\pi} \sum_{n=1}^{\infty} \cos 0 \; dt &= [t]_0^{2\pi} = 2\pi \quad (\text{もし } n = m \text{ なら}) \end{aligned} \tag{58}$$

このことから

$$a_m = \frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} f(t) \cos mt \; dt \quad (\text{m= } 0,\, 1,\, 2,\, 3,\, \cdots) \tag{59}$$

が言えます。ここで、a_0 も同様に含めて書いている事に注意して下さい。これを同様に sin についても行ってみましょう。すると同じ様に b_m が関数 $f(t)$ に $\sin mt$ をかけて $0-2\pi$ まで積分して π で割って得られることが分かるはずです。以上の事から、周期 2π の関数 $f(t)$ に含まれる任意の角周波数 m の波の振幅が以下の様に求める事が出来ます。

フーリエ係数

$$a_m = \frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi} f(t)\cos mt\ dt \quad (\text{m}=0,\,1,\,2,\,3,\,\cdots) \tag{60}$$
$$b_m = \frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi} f(t)\sin mt\ dt \quad (\text{m}=1,\,2,\,3,\,\cdots)$$

これは周期 2π の関数に限らず任意の周期 T の関数に関しても同様に成り立ちますので、積分範囲を書き換えて三角関数の角度に当たる部分を T を用いて書き直せば、cos や sin が周期 T/m で 2π をむかえるようにすればよいので、

$$a_m = \frac{1}{\pi}\int_0^{T} f(t)\cos\frac{2\pi}{T}mt\ dt \quad (\text{m}=0,\,1,\,2,\,3,\,\cdots) \tag{61}$$
$$b_m = \frac{1}{\pi}\int_0^{T} f(t)\sin\frac{2\pi}{T}mt\ dt \quad (\text{m}=1,\,2,\,3,\,\cdots)$$

も成り立ちます。

上に示されたフーリエ係数を以下の様な周期関数について実際に計算してみましょう。この関数は、$t > 2\pi$ でこの変化を繰り返す関数であるとします。

$$\begin{aligned} (t \le \pi) \qquad f(t) &= \sin^2 2t \\ (\pi < t \le 2\pi) \qquad f(t) &= 0 \end{aligned} \tag{62}$$

(62) のフーリエ係数を求めるとまず、a_n は、(61) を用いて、

$$a_n = \frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi}\left[-\frac{\cos(4+n)t}{4} - \frac{\cos(4-n)t}{4} + \frac{\cos nt}{2}\right]dt \tag{63}$$

となります。ここで、三角関数の積の公式を用いました。今取り扱っている

周期関数 (62) に着目すれば、$t > \pi$ では $f(t) = 0$ であるので、積分の範囲を (0-2π) から (0-π) に変更しても結果は変わらないことが分かります。即ち、

$$a_n = \frac{1}{\pi}\int_0^{\pi}\left[-\frac{\cos(4+n)t}{4} - \frac{\cos(4-n)t}{4} + \frac{\cos nt}{2}\right]dt \tag{64}$$

また、$\int_0^{\pi}\cos mtdt$ の値は、$m = 1, 2, 3, \cdots$ で 0 となるので、a_n はほとんどの n ついて 0 となります。ただし、$n = 4$ では、(65) の第 2 項が $\cos 0 = 1$ を含むため、その定積分が a_4 として残り、a_4 は、以下の様に書けます。

$$a_4 = \frac{1}{\pi}\int_0^{\pi}\left[-\frac{1}{4}\right]dt = \frac{1}{\pi}\left[-\frac{t}{4}\right]_0^{\pi} = -\frac{1}{4}. \tag{65}$$

b_n も同様に、(61) から計算できます。同じく、積分範囲を (0-π) に変更しても結果は変わらないはずですので、

$$b_n = \frac{1}{\pi}\int_0^{\pi}\left[-\frac{\sin(4+n)t}{4} + \frac{\sin(4-n)t}{4} + \frac{\sin nt}{2}\right]dt \tag{66}$$

この積分は、$\int_0^{\pi}\sin mtdt \quad (m = 2, 4, 6, 8, \cdots)$ で m が偶数なら 0 になることから、n が偶数なら $(n+4)$ も $(n-4)$ も偶数となりよって積分値は全て 0 になることは明らかです。一方 n が奇数の時には、$\int_0^{\pi}\sin mtdt \quad (m = 1, 3, 5, 7, \cdots)$ 積分範囲が π までですので、積分値は 0 にはなりません。従って n が奇数の時は b_n を定積分から求める事が出来ます。b_n は、

$$b_n = \frac{1}{\pi}\left[\frac{\cos(4+n)t}{4(4+n)} - \frac{\cos(4-n)t}{4(4-n)} + \frac{\cos nt}{2n}\right]_0^{\pi} \tag{67}$$

$\cos m\pi$ は m が奇数なら、$\cos m\pi = -1$ であり、また $\cos 0 = 1$ ですのでこれらを使って、

$$b_n = \frac{1}{\pi}\left[-\frac{1}{2(4+n)} + \frac{1}{2(4-n)} + \frac{1}{n}\right] \tag{68}$$

となります。

また、a_0 については、

$$a_0 = \frac{1}{\pi}\int_0^{\pi}\left[-\frac{1}{2}\cos 4t + \frac{1}{2}\right]dt = \frac{1}{\pi}\left[-\frac{t}{2}\right]_0^{\pi} = \frac{1}{2} \tag{69}$$

と求められます。積分内の第一項は、a_n のときと同様に、0-π での $\cos mt$ の積分値が 0 になることから 0 となることが明らかです。

さて、このようにして求めたフーリエ係数をもとに作成したフーリエ級数は、本当にもとの周期関数 $f(t)$ を表す事が出来るのでしょうか。これを確かめるためにこのフーリエ級数の動画 を作成したました。実際に見てみて下さい。

2.2 複素フーリエ級数

周期関数 $f(t)$ を cos や sin の波の和として表す事が出来るので、以下のオイラーの公式を用いれば、これを複素数の級数として一つにまとめる事が出来るはずです。

オイラーの公式

オイラーの公式は、指数関数と三角関数が以下の関係を持つ事を示す。

$$\begin{aligned} e^{i\theta} &= \cos\theta + i\sin\theta \\ e^{-i\theta} &= \cos\theta - i\sin\theta \end{aligned} \tag{70}$$

2 番目の式は $\cos\theta = \cos -\theta$、 $\sin\theta = -\sin -\theta$ から明らかである。i は虚数単位で、$i^2 = -1$ を満たす。この e は、ネイピア数と呼ばれ、$e = 2.7182818284\cdots$ といった無理数である。この e を指数関数 $y = a^x$ の底にもつ関数、$y = e^x$ はその微分した関数も同じ e^x になるという性質を持つ ($dy/dx = e^x$)。(70) が本当に成り立つのか調べてみよう。そこで下表の様に e^{ix}、$\cos x$、$i\sin x$ をマクローリン展開 (14) した x^0, x, x^2, x^3 にかかる係数の値を示す。

関数	第 1 項	第 2 項	第 3 項	第 4 項
$\cos x$	$\cos 0 \times \frac{1}{0!}$	$-\sin 0 \times \frac{1}{1!}$	$-\cos 0 \times \frac{1}{2!}$	$\sin 0 \times \frac{1}{3!}$
$i\sin x$	$i\sin 0 \times \frac{1}{0!}$	$i\cos 0 \times \frac{1}{1!}$	$-i\sin 0 \times \frac{1}{2!}$	$-i\cos 0 \times \frac{1}{3!}$
$\cos x + i\sin x$	$1 \times \frac{1}{0!}$	$i \times \frac{1}{1!}$	$-1 \times \frac{1}{2!}$	$-i \times \frac{1}{3!}$
e^{ix}	$1 \times \frac{1}{0!}$	$i \times \frac{1}{1!}$	$-1 \times \frac{1}{2!}$	$-i \times \frac{1}{3!}$

上の表から (70) が成り立つ事が分かる。

今、周期関数 $f(t)$ を以下の様に指数関数で記述できれば式が一つにまとめられるので非常に便利です。

$$f(t) = \sum_{n=0}^{\infty} c_n e^{i\frac{2\pi n}{T}t} \tag{71}$$
$$\text{ここで}\quad c_n = \alpha_n + i\beta_n$$

この式 (71) をオイラーの公式 (70) を用いて書き直すと、

$$\begin{aligned} f(t) = &\sum_{n=0}^{\infty} \alpha_n \cos i\frac{2\pi n}{T}t - \sum_{n=0}^{\infty} \beta_n \sin i\frac{2\pi n}{T}t \\ &+i\left(\sum_{n=0}^{\infty} \alpha_n \sin i\frac{2\pi n}{T}t + \sum_{n=0}^{\infty} \beta_n \cos i\frac{2\pi n}{T}t\right) \end{aligned} \tag{72}$$

となります。上の式は、とても実フーリエ級数の式 (53) に似ていますが、決定的に異なる部分があります。それは、最後の i がかかった ( ) 内の項です。もともと $f(t)$ は実関数ですので、この虚数の項は何とかして削除しなければなりません。そこで、波の和を求める範囲を $0-\infty$ から、$-\infty-\infty$ の負の方向にも広げてみましょう。この和の範囲の拡張作業を虚部と実部にわけて見ていきます。

まず、$\sum_{n=-\infty}^{\infty}(ImagenaryPart)$ の $\pm$ で対称となっている項に着目します。即ち、

$$\begin{aligned} &(n=k,-k)\ \text{である虚数項のみ：} \\ &i\left(\alpha_k \sin i\frac{2\pi k}{T}t + \alpha_{-k} \sin i\frac{2\pi(-k)}{T}t + \beta_k \cos i\frac{2\pi k}{T}t + \beta_{-k} \cos i\frac{2\pi(-k)}{T}t\right) \end{aligned} \tag{73}$$

$\cos\theta = \cos -\theta$、 $\sin\theta = -\sin -\theta$ であるので、与式は、

$$\text{与式} = i\left[(\alpha_k - \alpha_{-k}) \sin i\frac{2\pi k}{T}t + (\beta_k + \beta_{-k}) \cos i\frac{2\pi k}{T}t\right] \tag{74}$$

となり、これが全ての k について 0 となれば、0 に対して対称な和の範囲 ($n=-\infty$ から $+\infty$) の全てにおいて差引ゼロとなって、(72) の虚部全てを 0 にする事が出来ます。そのためには、以下の要件が必要です。

$$\alpha_k = \alpha_{-k} \tag{75}$$
$$\beta_k = -\beta_{-k}$$
$$\beta_0 = 0$$

最後の、$\beta_0 = 0$ は $\beta_k = -\beta_{-k}$ が $k = 0$ については成り立たないため必要な条件です。この条件を満たす (71) の複素数係数 c_n は、以下の様になります。

$$\begin{aligned} c_n &= \alpha_n + i\beta_n \\ c_{-n} &= \alpha_{-n} + i\beta_{-n} = \alpha_n - i\beta_n \\ &\therefore \\ &c_{-n} = c_n^\star \end{aligned} \tag{76}$$

ここで、$c_n^\star = \alpha_n - i\beta_n$ は c_n の複素共役である。

即ち、(76) を満たす c_n を使えば、(72) の虚部を全て 0 にする事が出来ます。

一方、同時に (72) の和の範囲を $-\infty$ に拡張した $\sum_{n=-\infty}^{\infty}(RealPart)$ はこの時どうなるのでしょうか。ここでも同様に、$\cos\theta = \cos -\theta$、$\sin\theta = -\sin -\theta$ であること、また、α_n や β_n の条件 (75) を使えば、

$$\sum_{n=-\infty}^{\infty} 実部 = \alpha_0 + \sum_{n=1}^{\infty} 2\alpha_n \cos\frac{2\pi n}{T}t - \sum_{n=1}^{\infty} 2\beta_n \sin i\frac{2\pi n}{T}t \tag{77}$$

ここで、2 という係数が右辺第 2、3 項に出て来たのは、対称な和の範囲 $n = k$ と $n = -k$ とした時の各項が、全く同じになるため、和の範囲を再び $n = 1$ から ∞ に戻し項を 2 倍しているためです。したがって、和の範囲を $-\infty$ まで拡張し、c_n が条件 (76) を満たす場合には、虚部は消え実部のみが残り、それは実フーリエ級数と殆ど同じものとなりました。これを実フーリエ級数 (53) と比較して c_n は係数 a_n と b_n と以下の関係を持つ事が分かります。

$$\alpha_n = \frac{1}{2}a_n \quad (n = 0, 1, 2, 3\cdots) \tag{78}$$
$$\beta_n = -\frac{1}{2}b_n \quad (n = 1, 2, 3\cdots)$$

以上の事から実数の周期関数 $f(t)$ は、以下に示す複素フーリエ級数で書き表せることが分かりました。

複素フーリエ級数

$$f(t) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} c_n e^{i\frac{2n\pi}{T}t} \tag{79}$$

ただし

$$c_{-n} = c_n^\star$$
$$c_n = \alpha_n + i\beta_n$$
$$\alpha_n = \frac{a_n}{2}$$
$$\beta_n = -\frac{b_n}{2}$$

では複素フーリエ級数で表された $f(t)$ の任意周期 T/m の波の振幅はどのように算出できるのでしょうか。これには、実フーリエ級数の時と同様に知りたい周期 T/m をもつ指数関数を $f(t)$ かけ $0-T$ まで積分します。即ち、

$$\int_0^T f(t)e^{-i\frac{2m\pi}{T}t}\ dt = \sum_{n=-\infty}^{\infty} c_n \int_0^T e^{i\frac{2(n-m)\pi}{T}t}\ dt \tag{80}$$

ここで、右辺の積分は、

$$\begin{aligned}
\int_0^T e^{i\frac{2k\pi}{T}t}\ dt &= \frac{T}{2k\pi i}\left[e^{i\frac{2k\pi}{T}t}\right]_0^T \qquad (81)\\
\text{もし } k &= 0 \text{ なら}\\
\int_0^T e^0\ dt &= [t]_0^T = T\\
\text{もし } k &\neq 0 \quad \text{なら}\\
&= \frac{T}{2k\pi i}\left[e^{2ki\pi} - 1\right]\\
&= \frac{T}{2k\pi i}\left[\cos 2k\pi + i\sin 2k\pi - 1\right]\\
&= \frac{T}{2k\pi i}\left[1 + 0 - 1\right] = 0
\end{aligned}$$

であるので、(80) で $m = n$ 以外の場合は全て積分値が 0 となり、複素フーリエ級数のフーリエ係数は、

複素フーリエ係数

$$c_m = \frac{1}{T}\int_0^T f(t)e^{-i\frac{2m\pi}{T}t}\,dt \qquad m = 0, 1, 2, 3, \cdots \tag{82}$$

で得られる事が分かります。実フーリエ係数を求める式を一つに出来てすっきりしました。

2.3 フーリエ変換

これまでの議論では周期関数 $f(t)$ を考え、その周期を最大 T として来ましたが、実際の波動現象はその T よりも周期が長い場合もあり得ますし、その T の間では周期関数とは言えないかもしれません。そこで、周期をマイナス無限大から無限大まで考えてみましょう。こうすれば、短い範囲だけを見て周期を見いだせなくても、もっと長い範囲で周期を見いだせる可能性が生じます。また、こうする事で、これまでとびとびでしか扱えなかった波の角周波数を連続した変数として扱う事ができ、有用な理論を導く事ができるかもしれません。

フーリエ変換を導く前に、一つ準備しておきましょう。それは、複素フーリエ係数の式 (82) で積分の範囲を変える作業です。複素フーリエ級数でも扱っているのは周期 T の関数の集まりですので、各々の波は $t = 0$ 秒の振幅の値と $t = T$ 秒の振幅の値が等しいはずです。したがって、$0 - T$ の積分の範囲を、$-\frac{T}{2} - \frac{T}{2}$ にしても何ら問題は生じず、積分値は全く同じ値をとるはずです。従って (82) は、以下の様に書けます。

$$c_n = \frac{1}{T}\int_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}} f(t)e^{-i\frac{2n\pi}{T}t}\,dt \qquad n = 0, 1, 2, 3, \cdots \tag{83}$$

さてこの (83) の c_m を複素フーリエ級数の式 (79) の c_n に代入してみましょう。すると、

$$f(t) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} \frac{1}{T}\int_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}} f(t)e^{-i\frac{2n\pi}{T}t}\,dt\; e^{i\frac{2n\pi}{T}t} \tag{84}$$

さて、ここで角周波数 $k_n = 2n\pi/T$ について考えましょう。k_n は 1 秒間に何ラジアン波の位相が進むかを表します。今 n は、$n = 0, 1, 2, 3, \cdots$ です

ので、この $n=n$ と $n=n+1$ のときの角周波数の差、$\delta k_n = k_{n+1} - k_n$ は、$\delta k_n = 2\pi(n+1)/T - 2\pi n/T$ なので $\delta k_n = 2\pi/T$ と書けます。では、式 (84) を δk_n を使って書き直しましょう

$$f(t) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} \frac{\delta k_n}{2\pi} \int_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}} f(t)e^{-ik_n t}\, dt\ e^{ik_n t} \tag{85}$$

つぎに、今 $T \to \infty$ としてみましょう。すると、$\delta k_n = 2\pi/T$ ですので、$\delta k_n \to 0$ となります。即ち、これまで k_n としてとびとびの角周波数しか扱えなかったのに対し、無限大の積分範囲をとると、連続した k について議論することが可能になります。また積分の範囲は、$-T/2 - T/2$ が $-\infty - \infty$ となることが容易に分かると思います。また、最初の和の記号 $\sum$ については δk_n とセットで $T \to \infty$ とすると、以下の様に k に関する積分となります。

$$\sum_{n=-\infty}^{\infty} \delta k_n \to \int_{-\infty}^{\infty} dk \tag{86}$$

これらをまとめて書くと、

$$f(t) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \left[\int_{-\infty}^{\infty} f(t)e^{-ikt}\, dt \right]\ e^{ikt}\, dk \tag{87}$$

この (87) の [ ] 内を見れば、これは、複素フーリエ係数の式 (82) で積分範囲が無限大になったものです。フーリエ係数は知りたい角周波数について与えられるものですので、角周波数 k_n の関数です。一方、[ ] の関数もこれと同様に、波の振幅に相当する、連続した角周波数 k の関数となります。従って、[ ] を以下の様に $F(k)$ とします。

$$F(k) = \int_{-\infty}^{\infty} f(t)e^{-ikt}\, dt \tag{88}$$

すると、(87) は、

$$f(t) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} F(k)\ e^{ikt}\, dk \tag{89}$$

となります。

(88) を関数 $f(t)$ のフーリエ変換と呼び、(89) をフーリエ逆変換と呼びます。

フーリエ変換とフーリエ逆変換

フーリエ変換：ある関数 $f(t)$ に $\exp(-ikt)$ をかけて $-\infty$ から ∞ まで積分すると任意角周波数の波の振幅に比例する関数 $F(k)$ が得られる。

$$F(k) = \int_{-\infty}^{\infty} f(t)e^{-ikt}\ dt \tag{90}$$

フーリエ逆変換：ある関数 $f(t)$ の任意角周波数の波成分の振幅に比例する関数 $F(k)$ に $\exp(ikt)$ をかけて $-\infty$ から ∞ まで積分するともとの関数 $f(t)$ を得る。

$$f(t) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} F(k)\ e^{ikt}\ dk \tag{91}$$

同じ事を角周波数ではなく、周波数、$f = 1/T$(1 秒間に何回波があるか) で式を書くと、$f = k/(2\pi)$ または $2\pi df = dk$ であるので、フーリエ変換と逆変換は以下の様に書ける。

$$\begin{aligned} F(f) &= \int_{-\infty}^{\infty} f(t)e^{-i2\pi ft}\ dt \\ f(t) &= \int_{-\infty}^{\infty} F(f)\ e^{i2\pi ft}\ df \end{aligned} \tag{92}$$

2.4 パーシブルの等式とスペクトル

つぎに、スペクトルの概念の理解に大変重要なパーシブルの等式を導出しましょう。この式は、時間で積分した関数の持つエネルギー (振幅の 2 乗) は、その関数のフーリエ変換の 2 乗値を周波数空間で積分したものに等しいという式です。

それを導出するために、まずフーリエ変換 $F(k)$ と $F(-k)$ の関係を調べましょう。即ち、

$$
\begin{aligned}
F(k) &= \int_{-\infty}^{\infty} f(t)e^{-ikt}\ dt = \int_{-\infty}^{\infty} f(t)\left(\cos kt - i\sin kt\right)\ dt \qquad (93)\\
F(-k) &= \int_{-\infty}^{\infty} f(t)e^{ikt}\ dt = \int_{-\infty}^{\infty} f(t)\left(\cos kt + i\sin kt\right)\ dt
\end{aligned}
$$

であるので、$F(k)$ と $F(-k)$ はその虚部の符号が異なるだけという関係にあります。これは即ち、

$$
F(-k) = F^{\star}(k) \tag{94}
$$

で、$F(-k)$ が $F(k)$ の複素共役であることを意味します。

それでは、パーシブルの等式を導出するために、時系列関数 $f(t)$ と $g(t)$ の積、$f(t)g(t)$ をフーリエ変換して得られる $F[f(t)g(t)]$ を考えましょう。$F[f(t)g(t)]$ はもと関数とフーリエ変換の式を満たすので、以下が成り立ちます。

$$
F[f(t)g(t)] = \int_{-\infty}^{\infty} f(t)g(t)e^{-i2\pi ft}\ dt \tag{95}
$$

一方、$g(t)$ は以下のフーリエ逆変換の式をみたすはずです。

$$
g(t) = \int_{-\infty}^{\infty} G(\widetilde{f})e^{i2\pi\widetilde{f}t}\ d\widetilde{f} \tag{96}
$$

ここで、$\widetilde{f}$ は周波数ですが、(95) のフーリエ変換の際のものと区別するために、記号を変えてあります。

さて、この $g(t)$ のフーリエ逆変換の式を (95) に代入すると、

$$
F[f(t)g(t)] = \int_{-\infty}^{\infty} f(t)\left[\int_{-\infty}^{\infty} G(\widetilde{f})e^{i2\pi\widetilde{f}t}\ d\widetilde{f}\right]e^{-i2\pi ft}\ dt \tag{97}
$$

となり、この式を t についての積分を先に行うよう積分の順序を入れ替えると、

$$
\begin{aligned}
F[f(t)g(t)] &= \int_{-\infty}^{\infty} G(\widetilde{f})\left[\int_{-\infty}^{\infty} f(t)e^{-i2\pi ft}e^{i2\pi\widetilde{f}t}\ dt\right]\ d\widetilde{f} \qquad (98)\\
&= \int_{-\infty}^{\infty} G(\widetilde{f})\left[\int_{-\infty}^{\infty} f(t)e^{-i2\pi(f-\widetilde{f})t}\ dt\right]\ d\widetilde{f}
\end{aligned}
$$

と書けます。ここで、[ ] は $f(t)$ のフーリエ変換と同じで、ただ結果として変換された後の関数が $F(f)$ ではなくて $F(f-\widetilde{f})$ で表されることになります。このため、

$$F[f(t)g(t)] \;=\; \int_{-\infty}^{\infty} G(\widetilde{f})F(f-\widetilde{f})\,d\widetilde{f} \tag{99}$$

と書いても差し支えありません。

さて、今、$f=0$ で $g(t)=f(t)$ という特別な場合を考えましょう。すると (95) は、

$$\begin{aligned} F[f(t)g(t)] = \int_{-\infty}^{\infty} f(t)g(t)e^{-i2\pi ft}\,dt = \int_{-\infty}^{\infty} [f(t)]^2 e^0\,dt \\ = \int_{-\infty}^{\infty} [f(t)]^2\,dt \end{aligned} \tag{100}$$

となり、(99) と併せて以下が成り立ちます。

$$\begin{aligned} \int_{-\infty}^{\infty} [f(t)]^2\,dt &= \int_{-\infty}^{\infty} G(\widetilde{f})F(-\widetilde{f})\,d\widetilde{f} \\ &= \int_{-\infty}^{\infty} F(\widetilde{f})F(-\widetilde{f})\,d\widetilde{f} \end{aligned} \tag{101}$$

ところで、(94) から (101) は更に、

$$\int_{-\infty}^{\infty} [f(t)]^2\,dt = \int_{-\infty}^{\infty} F(\widetilde{f})F^{\star}(\widetilde{f})\,d\widetilde{f} \tag{102}$$

となり、また、複素数と複素共役の掛け算が絶対値の 2 乗に等しい事から $(F(\widetilde{f})F^{\star}(\widetilde{f}) = |F(\widetilde{f})|^2)$、以下の等式が成り立つ事が分かります。

パーシブルの等式

$$\int_{-\infty}^{\infty} [f(t)]^2 \, dt = \int_{-\infty}^{\infty} |F(f)|^2 \, df \tag{103}$$

これはつまり、例えば流速の絶対値の時系列データがある時、運動エネルギーの 2 倍に相当する流速の 2 乗値を時間で積分したものは、流速時系列のフーリエ変換の絶対値の 2 乗値を周波数で積分したものに等しい事を意味しています。従って、時系列データをフーリエ変換したものの絶対値の 2 乗は、エネルギースペクトルと呼びます。

しかしながら、定義上 $|F(f)|^2$ は、$f(t)$ が $t \to \pm\infty$ で 0 に近づかない場合には、両側の積分範囲を無限大に取っている以上発散してしまいます。この積分範囲が無限大であることに起因する発散は、以下の様な量を考えれば、回避することが出来ます。即ち、

パワースペクトル密度

$$P(f) = \lim_{T \to \infty} \frac{1}{T} |F(f)|^2 \tag{104}$$

この量をパワースペクトル密度と呼ぶ。現実的にはでーたを取得できる範囲には限りがあるため $T \to \infty$ とする事は出来ない。従って、実際のパワースペクトル密度の計算では、データの取得期間 T を有限にし、パワースペクトル密度を以下の様に定義して計算する。

$$P_T(f) = \frac{1}{T} |F(f)|^2 \tag{105}$$

$P_T(f)$ は、例えば、期間 T で取得した時系列が、潮位変動 η の平均値 $\overline{\eta}$ からの偏差、ずれ $\eta' = \eta - \overline{\eta}$ だとするとき、それから求めたパワースペクトル密度は、$|F(f)|/T$ であり、パーシブルの等式 (103) から、パワースペクトル密度の周波数に関する積分値 $\int |F(f)|^2/T \, df$ が、偏差の時系列の 2 乗を T で割ったもの、即ち、分散、$\int (\eta - \overline{\eta}) \, dt/T$ に等しいことを表す。このことは、ある時系列が偏差である場合 (例えば η')、時系列のパワースペクトル密度が示す任意周波数 f での値は、その周波数の波動が全体のデータの持つ分散に寄与する”分散相当の量”を表すことを意味する。このため”密度”という単語が使われる。

2.5　離散フーリエ変換

前述の通り、パワースペクトル密度は現実的には有限期間に取得されたデータを元に計算されます。また、実際のデータはアナログ的で連続ではありません。むしろ計算機に記録する関係上、デジタル化されます。デジタル化されたデータは、時間的にとびとびで、多くの場合一定時間毎の計測によって取得されたものです。この様なデータを離散データと呼びます。潮汐のデータも例外ではありません。ここでは、パワースペクトル密度を離散データについて計算する事を実際に演習して行きましょう。

N この観測値からなる離散時系列データ $x(j)$ のフーリエ変換 $X(l)$ は、フーリエ変換が

$$X(f) = \int_{-\infty}^{\infty} x(t)e^{-i2\pi ft}\ dt \tag{106}$$

のように書けるため、これを離散的に表すことで以下の様に書けます。

$$X(l) = \sum_{j=1}^{N} x(j)\exp(-i2\pi\delta fl\delta tj)\ \delta t \tag{107}$$

ここで、$f = \delta fl$ と (106) で連続的な周波数 f を、周波数の刻み幅 δf を整数倍することで表現しています。また同様に (106) で連続的な時間 t も、時間の刻み幅 δt を整数倍する事で表します。この周波数の刻み幅は、離散時系列データの取得期間を T としたときに、その期間で表しうる最も波長の長い波動の周期が同じく T であり、従って、最も低周波の波の周波数は、$1/T$ となり、その次がその 2 倍となることから、周波数の刻み幅も $\delta f = 1/T$ となります。一方時間の刻み幅 δt は、データを離散的に取得した一定の時間間隔で区間長 T とデータ数 N で $\delta t = T/N$ であらわせます。これらを (107) に代入して整理すると、以下の離散フーリエ変換を得る事が出来ます。

$$X(l) = \sum_{j=1}^{N} x(j)\exp(-i2\pi\frac{lj}{N})\ \frac{T}{N} \tag{108}$$

2.5.1　l の範囲

離散データに関してフーリエ変換を行う方法が判ったので、フーリエ変換したものの絶対値の 2 乗を求め、それを区間長で割れば離散データのパワース

ペクトル密度を計算する事が出来ます。しかしながら、上記の式の周波数の刻み幅の整数倍値 l は、どんな範囲で計算すべきでしょうか。

パーシブルの等式 (103) では、周波数空間での積分範囲は、$\pm\infty$ となっています。しかしながら、$F(-f) = F^{\star}(f)$ であることから、ある任意の周波数 f_o におけるエネルギースペクトル $F(f_o)F^{\star}(f_o)$ に対して原点に対称な $-f_o$ におけるエネルギースペクトル $F(-f_o)F^{\star}(-f_o)$ が、$F^{\star}(f_o)F(f_o)$ となるため、エネルギースペクトルやパワースペクトル密度は原点で対称となります。このため、周波数について片側 (正の領域) のみ計算し、積分値を 2 倍すれば、パーシブルの等式を満たす事ができ、計算を省略する事が出来ます。そこで、$l = 0$ を離散フーリエ変換を計算する最初の l としましょう。

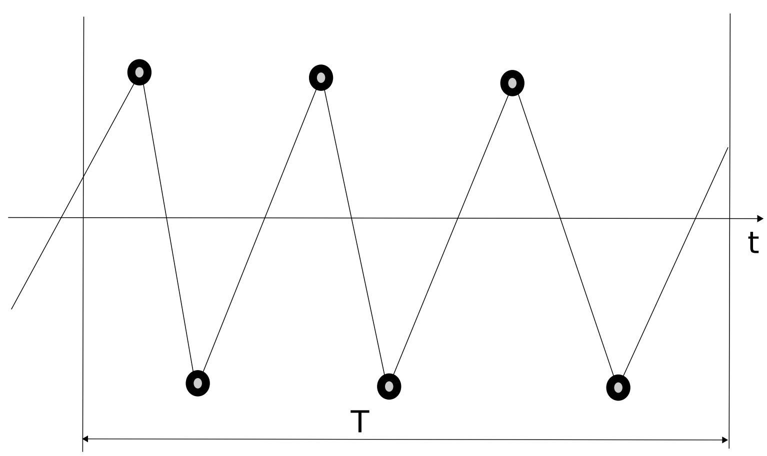


Figure 9:　区間 T 内に 6 点観測値がある場合の模式図

次に l を 0 からいくつまで計算する必要があるでしょうか。これについては、離散データ数 N で解像できる最高周波数の波の周波数に相当する l までということになります。今、データの取得期間 T で 6 個のデータが等間隔得られているとしましょう。このサンプリング間隔 δt は $\delta t = T/6$ 秒となり、従って、サンプリングの周波数 Fs(1 秒間に何回観測しているか) は、$F_s = 1/\delta t = 6/T$ Hz となります。このデータ個数で表される、最も周期の短い高周波の波は、図 (12) の様に周期が $T/3$ 秒で、周波数が $3/T$Hz の波です。即ち、サンプリング周波数の半分の周波数の波よりも細かい波の変動は、離散データで正確に解像する事は出来ません。

以上の事から、サンプリング周波数 Fs としたときに、表す事の出来る最も周波数の高い波の周波数 F_N は、

$$F_N = \frac{F_s}{2} = \frac{1}{2\delta t} \tag{109}$$

であり、これはナイキスト周波数と呼ばれます。従って F_N に相当する l まで、フーリエ変換を行えば良い事になります。先程の考え方から、連続的な周波数 f を $f = \delta fl$ と周波数の刻み幅 δf を整数倍して表しました。これが F_N に等しくなる l は、

$$\begin{aligned} f = \delta fl = \frac{1}{T}l \leq F_N = \frac{1}{2\delta t} &= \frac{N}{2T} \\ l &\leq \frac{N}{2} \end{aligned} \tag{110}$$

となり、$l = N/2$ まで計算すれば良い事になります。

従って、離散フーリエ変換の計算は以下の様な行列の式に書く事が出来ます。

$$\begin{pmatrix} X(0) \\ X(1) \\ X(2) \\ \vdots \\ X(l) \\ \vdots \\ X(2/N) \end{pmatrix} = \tag{111}$$

$$\begin{pmatrix} E_{01} & E_{02} & E_{03} & \cdots & \cdots & E_{0j} & \cdots & \cdots & E_{0N} \\ E_{11} & E_{12} & E_{13} & \cdots & \cdots & E_{1j} & \cdots & \cdots & E_{1N} \\ E_{21} & E_{22} & E_{23} & \cdots & \cdots & E_{2j} & \cdots & \cdots & E_{2N} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \cdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ E_{l1} & E_{l2} & E_{l3} & \cdots & \cdots & E_{lj} & \cdots & \cdots & E_{lN} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ E_{N/2\ 1} & E_{N/2\ 2} & E_{N/2\ 3} & \cdots & \cdots & E_{N/2\ j} & \cdots & \cdots & E_{N/2\ N} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x(1) \\ x(2) \\ x(3) \\ \vdots \\ \vdots \\ x(j) \\ \vdots \\ \vdots \\ x(N) \end{pmatrix}$$

ここで E_{lj} は

$$E_{lj} = \exp(-i2\pi \frac{lj}{N})\ \delta t \tag{112}$$

である。

3　Matlab/Octave を用いたフーリエ解析

3.1　Matlab/Octave 導入

Matlab とは科学研究ソフトウェアの一つで 1970 年代にアメリカの大学で開発された。 Matrix Laboratory の略で行列演算を直接行うことが出来る。また、汎用性が高く大気や海洋など地球惑星物理分野をはじめとした多くの分野で利用されている。

3.1.1　MATLB の起動

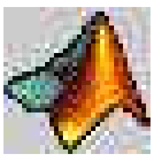


Figure 10:　Matlab のアイコン

上のようなアイコンをダブルクリックすれば MATLAB を起動することができる。起動すると以下のような画面が現れる。

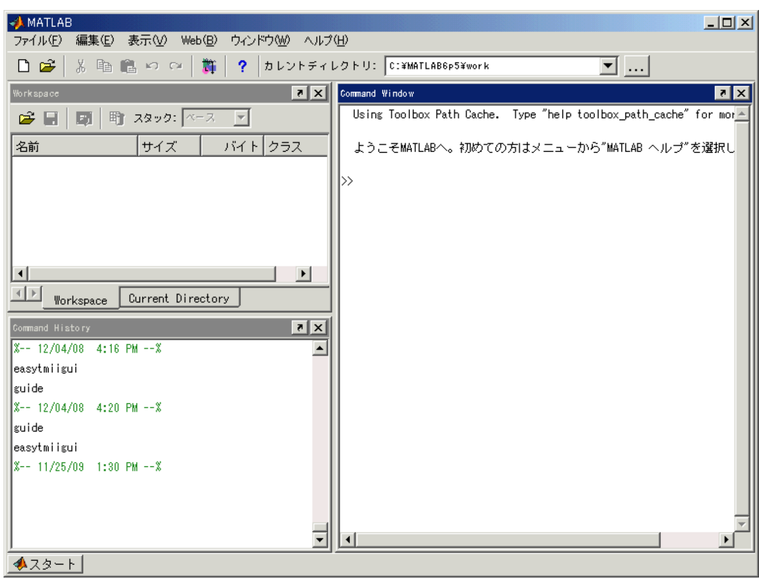


Figure 11:　Matlab の window

- コマンドウィンドー： ウィンドー右側。コマンドを直接入力し計算させる事ができる。
- ワークスペースウィンドー：ウィンドー左上。現在計算に直接使用できる変数の情報を確認できる。
- コマンド履歴ウィンドー：ウィンドー左下。これまで実行した命令文の履歴を確認、選択による再実行ができる。
- ワークスペース：現在計算や処理に用いている記憶領域 (例えば机の上)

Matlab を用いた作業は、ワークスペースと呼ばれる、作業に直接かかわるいわば机のようなスペースを、ある任意のコンピュータ内のディレクトリーにおき、必要であればそれを移動して他のファイルを読み込んだりしながら行う。

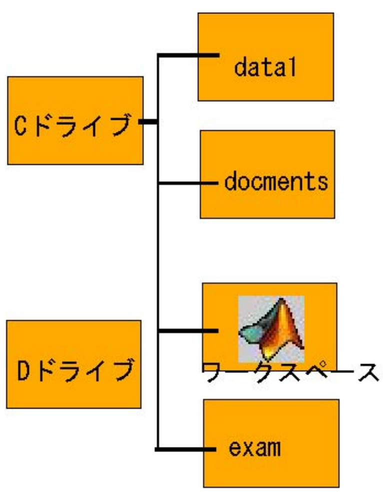


Figure 12: Matlab のワークスペースの概念

3.1.2 基本的なコマンドの入力と実行

pwd コマンド pwd は現在ワークスペースが何処にあるかを出力します。pwd(print working directory) を実行してみよう。

実行例

```
>>pwd
ans =
C:\MATLAB6p5\work
```

というような出力を得られる。ans は出力先を指定しなかった為に自動的にMATLAB が作成した変数である。ans の内容は実際のディレクトリ構成によるため必ずしも上記と同じであるとは限らない。

cd コマンド　cd は change directory の略で、ワークスペースを他のディレクトリーに移したい時に用いる。cd を使ってディレクトリを移動してみよう。

```
>>cd ..
>>pwd
ans =
C:\MATLAB6p5
```

cd .. は、以前ワークスペースを置いていたディレクトリーの一つ上の階層へディレクトリーを移動する。このため、次の命令 pwd の出力 ans は、C:\MATLAB6p5\work から C:\MATLAB6p5 に変化しているのがわかる。このようなディレクトリーの移動の仕方を相対パスを用いた移動と呼ぶ。相対パスとは、相対的な位置関係（例えばこの場合一つ上の階層を示す..）を使ったコンピュータ内のアドレスである。それに対して絶対パスは、絶対的な位置 (アドレスを最初から最後まで書く) を用いたアドレスである。

　今、C ドライブの Research ディレクトリーにいるとして、その中にある data1 フォルダの、そのまた中の data フォルダのアドレスは相対パス、絶対パスを用いて以下のように書ける。

- 相対パス：.\data1\data　　(. は現在位置を表す)
- 絶対パス：C:\Research\data1\data

ls コマンド　ls は現在ワークスペースを置くディレクトリーにどんなファイルが存在するかをリストにして示してくれる。実際にコマンドウィンドーに ls と入力して結果を調べてみよう。

```
>>ls
        . extern license.txt work
        .. help notebook
        MATLAB 6.5.lnk ja sys
        bin java toolbox
        demos jhelp uninstall
```

　のようなワークスペースを置いたディレクトリー内のファイルやフォルダ名の一覧が見られるはずである。

who コマンド　who はワークスペースに存在する変数名の一覧を出力するコマンドである。実行してみよう。

```
>>who
        Your variables are:
        ans
```

上の例では、ワークスペース上に先ほど pwd で出力された結果 ans が一覧表示された。

whos コマンド　whos は who と類似したコマンドであるが、さらに詳細な変数情報を出力する。

```
>>whos
        Name Size Bytes Class
        ans 1x12 24 char array
        Grand total is 12 elements using 24 bytes
```

whos によって、ans という変数が 1 行 12 列の char array(文字列) であることがわかった。

3.1.3　ベクトルや行列の定義、四則演算

FORTRAN や BASIC では、複数の値をもつ変数を配列と呼んだが、MATLAB では 1 行や 1 列のデータとして一つの変数に格納される複数の値をベクトルと呼ぶ。例えば、1 から 20 まで 1 ずつ増加する行ベクトルを生成してみよう。

```
>>e=1:1:20
        e =
        Columns 1 through 10
        1 2 3 4 5 6 7 8 9 10
        Columns 11 through 20
        11 12 13 14 15 16 17 18 19 20
```

1:1:20 の中央の 1 は、1 ずつ増えることを表す。これを任意の整数に置き換えてベクトルや行列を任意数ずつ増加（減少）するように定義できる。e の定義の仕方について上記と同様なことは以下のようにも出来る。ベクトルや行列の定義の際には [] を用いて値を囲む。

```
>>e=[1 2 3 4 5 6 7 8 9 10 11 12 13 14 15 16 17 18 19 20]
```

この行ベクトルを列ベクトルとして定義するには、; で数字を区切る。

```
>> f=[1;2;3;4;5;6;7;8;9;10;11;12;13;14;15;16;17;18;19;20]
        f =
        1
        2
```

```
            3
            4
            5
            6
            7
            8
            9
            10
            11
            12
            13
            14
            15
            16
            17
            18
            19
            20
```

あるいは、元の行ベクトル e を Transpose（転置）して列ベクトルに変換することも出来る。

```
>>  f=e'
```

結果は上記 f の内容と同一となる。

同様に、行列は以下のように定義することが出来る。

```
>>g=[92  4  6;1  2  3;8  -3  4]
            g =
            92    4     6
             1     2     3
             8  -3    4
```

上の例では、3 行 3 列の正方行列が g として定義されている。ベクトルと同様に' を使って転置行列を求めてみよう。

```
>>h=g'
            h =
            92    1     8
            4     2    -3
            6     3     4
```

となったはずである。h は g の転置行列であり、h=gT と教科書などには書かれる。次に、行列の一部を別の行列として抽出する。h の 1 から 2 行、1 から 2 列目を抜き出して m とするには以下のようにする。

```
>>m=h(1:2,1:2)
            m =
            92  1
            4  2
```

ここで、h(1:2,1:2) は行範囲を、h(1:2,1:2) は列範囲を指定する事に注意を要する。もし、h の 2 列目を取り出し h2 という列ベクトルとして定義したい場合は以下のようになる。

```
>>h2=h( : , 2)
            m =
            1
            2
            3
```

あるいは h の 1 行目を取り出したい場合は以下になる。

```
>>h1=h( 1, : )
            h1 = 91      1   8
```

つまり、行列の全ての列や全ての行を指定するとき、: だけで指定できると言うことである。また、h の 2 行目から最終行までを取り出すときは以下のようにも書ける。

```
>>m2=h(2:end,:)
            m =2
            4     2   -3
            6     3    4
```

end によって最終行や最終列を指定できることを意味し、膨大な行、列数をもつ行列の行列数を調べることなく end を用いればよい。

これらベクトルや行列が同じ次元を持つとき、Matlab ベクトルや Matlab 行列同士の四則演算は、”行列” としての計算を行わせる場合と、そうでない場合に分けられる。例えば g × h を行う場合、以下に示す二種類の掛算は同一ではない。

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \\ 7 & 8 & 9 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} 2 & 4 & 6 \\ 8 & 10 & 12 \\ 14 & 16 & 18 \end{pmatrix} \tag{113}$$

$$A \cdot B = \begin{pmatrix} 1\cdot2+2\cdot8+3\cdot14 & 1\cdot4+2\cdot10+3\cdot16 & 1\cdot6+2\cdot12+3\cdot18 \\ 4\cdot2+5\cdot8+6\cdot14 & 4\cdot4+5\cdot10+6\cdot16 & 4\cdot6+5\cdot12+6\cdot18 \\ 7\cdot2+8\cdot8+9\cdot14 & 7\cdot4+8\cdot10+9\cdot16 & 7\cdot6+8\cdot12+9\cdot18 \end{pmatrix}$$

式 (114) は、行列 A と B の行列の積を計算したものである。

$$A.\star B = \begin{pmatrix} 1\cdot2 & 2\cdot4 & 3\cdot6 \\ 4\cdot8 & 5\cdot10 & 6\cdot12 \\ 7\cdot14 & 8\cdot16 & 9\cdot18 \end{pmatrix} \tag{114}$$

(114) は、行列 A,B の各要素毎の掛算である。MATLAB では、(114) と (114) を以下のように書き分ける。

```
>>A*B
```

```
>>A.*B
```

それぞれの実行例は以下のとおりである。

```
>>a=[1 2 3;4 5 6;7 8 9]
        a =
        1 2 3
        4 5 6
        7 8 9
```

```
>>b=[2 4 6;8 10 12;14 16 18;]
          b =
        2 4 6
        8 10 12
        14 16 18
```

```
>>a*b
        ans =
        60 72 84
        132 162 192
        204 252 300
```

```
>>a.*b
        ans =
        2 8 18
        32 50 72
        98 128 162
```

このことは、割算についても同様である。

他の演算子、予約語

3.1.4 Matlab/Octave のプログラム

Matlab のプログラムが長くなった場合には、Basic や Fortran と同様に、プログラムをエディターと呼ばれる外部プログラムで作成し、それに名前をつけて、その名前を呼び出してプログラムを実行することができる。Matlab ではそれらのファイルの拡張子は、*.m ファイルである。例えば、Matlab のコマンドウィンドーに Hello world と表示するプログラムを helloworld.m として保存してみよう。それにはまず、Matlab の「新規作成」ボタンを押し、m-file の新しいシートを作成する。その m-file に以下の内容を記載し、helloworld.m

内容	コマンド
足し算	+
引き算	−
かけ算	*
割り算	/
べき乗	ˆ
割り算の余り	mod(a,b)
平方根	sqrt(a)
最大値	min(a)
最小値	max(a)
指数関数	exp(a)
正弦関数	sin(a)
余弦関数	cos(a)
虚数単位	i 或は j
π	pi

Table 3: 演算子や予約語

と言う名前でワークスペースを置く場所に保存しよう。Octave の場合は、メモ帳等に、以下のプログラムを書いて、それを helloworld.m と Octave のワークスペースを置く場所に保存すれば良い。

```
\% display strings
disp('hello world')
```

ここで disp は、括弧内を画面に表示せよという命令だ。保存したら、

```
\% list the file
>>ls helloworld.m
```

とうって現在のワークスペース内に、そのプログラムのファイルがあるか確認しよう。もしあれば、

```
>>ls helloworld.m
helloworld.m
```

と答えが返ってくる。

このプログラムを実行するには、コマンドウィンドーに、helloworld と保存名を打てばよい。すると、

```
>>helloworld
hello world
```

と結果が表示される。

3.2 Matlab/Octave でフーリエ変換する関数をつくる

3.2.1 Matlab/Octave の function

Matlab や Octave では、Fortran 等で頻繁に使われる、サブルーチン、副プログラムが存在する。Matlab ではそれらを Matlab function といい、以下のような形でそれは書く事が出来る。この例では、円の面積を半径からもとめる関数である。Matlab の関数では、関数内で使われている変数は、それを呼び出す別のプログラムからは見る事が出来ない。外部のプログラムには、あくまでも入力と戻り値しか見えない。

```
function a=circarea(r)
\%
\% this program is to compute area of circle with radius r.
a=pi*r^2;
```

これを circarea.m として保存すれば円の面積を求める Matlab 関数が出来た。ここで、a は、この関数の戻り値で、円の面積が入る。r は関数への入力値で半径である。また、% はそれ以降をプログラムの計算に無関係なコメント文にするための記号である。しばしば、関数やプログラムを説明するためにコメント文は付けられる。この関数がワークスペース上にあれば、コマンドウィンドーで、以下のようにこの関数を用いる事が出来る。

```
r1=12;
Ac=circarea(r1)
Ac=
   452.3893
```

上の例は、半径を r1 として定義し、結果を Ac に返すというプログラムである。これと同じ様にこの関数を、別のプログラム (m-file) 上で使う事も可能だ。つまり、先程の helloworld.m のようなプログラムで circarea を呼び出して使う事も出来る。ただ、それらのプログラムが同じディレクトリにあることが必要となる。

3.2.2 フーリエ変換の Matlab 関数

では、実際にフーリエ変換を実行する Matlab 関数を作ってみよう。離散フーリエ変換は、

$$X(l) = \sum_{j=1}^{N} x(j) \exp(-i2\pi \frac{lj}{N}) \ \frac{T}{N} \tag{115}$$

のように書ける。これを行列で書くと、

$$\begin{pmatrix} X(0) \\ X(1) \\ X(2) \\ \vdots \\ X(l) \\ \vdots \\ X(2/N) \end{pmatrix} = \tag{116}$$

$$\begin{pmatrix} E_{01} & E_{02} & E_{03} & \cdots & \cdots & E_{0j} & \cdots & \cdots & E_{0N} \\ E_{11} & E_{12} & E_{13} & \cdots & \cdots & E_{1j} & \cdots & \cdots & E_{1N} \\ E_{21} & E_{22} & E_{23} & \cdots & \cdots & E_{2j} & \cdots & \cdots & E_{2N} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \cdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ E_{l1} & E_{l2} & E_{l3} & \cdots & \cdots & E_{lj} & \cdots & \cdots & E_{lN} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ E_{N/2\ 1} & E_{N/2\ 2} & E_{N/2\ 3} & \cdots & \cdots & E_{N/2\ j} & \cdots & \cdots & E_{N/2\ N} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x(1) \\ x(2) \\ x(3) \\ \vdots \\ \vdots \\ x(j) \\ \vdots \\ \vdots \\ x(N) \end{pmatrix}$$

ここで E_{lj} は

$$E_{lj} = \exp(-i2\pi \frac{lj}{N}) \ \delta t \tag{117}$$

であった。したがって離散フーリエ変換を実施する関数の入力については、時系列 $x(j)$ と時系列の観測時間間隔 δt 時系列データの数 N の値が必要となる。しかし、N は入力する $x(j)$ を数えれば得られるので、実質必要なのは、時系列 $x(j)$ と時系列の観測時間間隔 δt ということになる。したがって、離散フーリエ変換の関数を mydft.m という関数として保存することとする。その関数は、以下のようなものとなる。

```
function X=mydft(x,dt)
\%
```

```
\% this program is to compute discrete Fourier transform.
\% counting number of x making x as a column vector
x=x(:);
N=length(x);
\% let x has even number of elements
if mod(N,2)~=0
    x=x(1:end-1);
    N=length(x);
end
\% getting Nyquist frequency
N2=N/2;
\% creating grid for i and l
[j,l]=meshgrid(1:1:N,0:1:N2);

\% compute a matrix E
E=exp(-(i*2*pi).*l.*j./N).*dt;
\% compute Fourier transform
X=E*x;
```

ここで、

```
\% counting number of x making x as a column vector
x=x(:);
N=length(x)
```

は x のデータの個数を数えて、左辺の変数 N に返す。ここで x(:) は、x を 1 列のベクトルにするコマンドである。また、N2 は、ナイキスト周波数に相当する整数 l の最大値である。

```
\% let x has even number of elements
if mod(N,2)~=0
    x=x(1:end-1);
    N=length(x);
end
```

では、ナイキスト周波数に相当する整数 l の最大値である N2 が $N/2$ で定義されるため N が奇数であるとき (N を 2 で割って余りが 0 で無い時：$mod(N,2) \neq 0$)、x を x(1:end-1) と x の要素数が偶数になるように調整するためのものだ。次に、

```
\% creating grid for i and l
[j,l]=meshgrid(1:1:N,0:1:N2);
```

は、1 から 1 ずつ N までを j にとって、0 から 1 ずつ N2 を l にとってそれらを夫々列と行にもつ格子状の行列にする meshgrid とよばれる関数である。この結果で得られる j と l は、$N2 \times N$ (N2 行、N 列) の行列となる。この格子状の j と l 行列を用いて、Matlab の行列演算の強みを活かして、E を計算しているのが、

```
\% compute a matrix E
E=exp(-(i*2*pi).*l.*j./N).*dt;
```

の部分だ。ここで i は虚数単位、pi は円周率で Matlab の予約語である。この行列 E さえ計算できれば、あとは、

```
\% compute Fourier transform
X=E*x;
```

と簡単に、x の離散フーリエ変換を求めることが出来る。実際は、離散フーリエ変換は、理想的なフーリエ変換の式と異なり、積分の範囲がデータの個数の範囲に限定される。このため、離散フーリエ変換を行う区間でデータは切り出された形となり、これは、切り出された区間だけ値が 1 である以下の関数

$$\begin{aligned} \delta &= 1 \quad (0 \leq t \leq T) \\ \delta &= 0 \quad (0 > t \; or \; t > T) \end{aligned} \tag{118}$$

を永遠に続く時系列データに掛けたもの $\delta \cdot x(j)$ を離散フーリエ変換することに他ならない。この切り取りによって、スペクトルの真の値にピークがある場合には、その推定値がその周辺に漏洩してしまうという悪影響がスペクトル推定値に及ぼされることが知られている。したがってそのような悪い影響を極力抑えてスペクトルの計算を行う手法が探求された。その一つがもっと滑らかな窓関数を持ちいてデータを切り出す方法である。上の例にある δ は 0 と 1 しかもたず、矩形窓と呼ばれる。これをもっと滑らかな cos 関数等を用いて、データの両端をゆっくりと 0 にするような関数に置き換えれば、このようなスペクトルの値の周辺周波数への漏洩は抑えられる事が知られている。そこで、以下のように mydft.m を変更しよう。

```
function X=mydft(x,dt)
\% this program is to compute discrete Fourier transform.
\% counting number of x
x=x(:);
N=length(x);
\% let x has even number of elements
if mod(N,2)~=0
    x=x(1:end-1);
    N=length(X);
end
\% getting Nyquist frequency
N2=N/2;
\% creating grid for i and l
[j,l]=meshgrid(1:1:N,0:1:N2);
\% compute cos window
W=0.5-0.5.*cos(2*pi.*j./N);
\% compute a matrix E with cos window
E=W.*exp(-(i*2*pi).*l.*j./N).*dt;
\% compute Fourier transform
X=sqrt(8/3).*E*x;
```

ここで、

```
\% compute cos window
W=0.5-0.5.*cos(2*pi.*j./N);
```

によって両端が cos の形で 0 に近づく窓関数 (window) が準備され、

```
\% compute a matrix E with cos window
E=W.*exp(-(i*2*pi).*l.*j./N).*dt;
```

で、E に掛け合わせておき、それを

```
\% compute Fourier transform
X=sqrt(8/3).*E*x;
```

とすることで、時系列の両端がゆっくりと 0 に近づけられた x を離散フーリエ変換することになる。またここで、sqrt(8/3) とあるのは、この窓関数が最大値 1 で両側が 0 に近づくものであるため、これを時系列データに掛けて減った分のデータの分散を補うための係数である。これは窓関数ごとに異なる。これを掛ける事によって、以前導出したパーシバルの等式を cos の様な窓関数を掛けた場合にも満たせる様に調整できる。

4　パワースペクトル密度の計算

この関数が完成したら、次は実際にこの潮汐データを公開しているページから自分の出身地に最も近い潮汐データの 3 ヶ月分 (いつでも良い) についてパワースペクトル密度を計算してみよう。

データの読み込みは、ここからダウンロードできる m-file を授業中の指示に従い使用して行って下さい。

この Matlab 関数を使えばダウンロードしたデータの特定期間を取り出す事が可能です。(また、取り出されたデータは平均値が取り除かれ、トレンドが除去されます。)

データを切り出して読み込み、それをフーリエ変換して、パワースペクトル密度を計算し、図示するプログラムを別の m-file として保存しよう。その m-file には、以下に示す順番で、自分のファイル名や、データ区間に合わせて調整しつつ命令を書き込んでみよう。

まずデータの読み込み部分は、例えば潮汐のデータの名前が ftpdata1.csv.txt 等であった場合、

```
fn='ftpdata1.csv.txt';
[time,data,days]=readjodctide(fn,3,1,5,31);
```

などとすればよい。ここで 3,1,5,31 は 3 月 1 日から 5 月 31 日までのデータを切り出す場合の例である。自分の好きな区間に調整してみよう。次に、読み込んだデータに不良値が無いか確かめる目的で図示する命令を書き込もう。

```
figure
plot(days-days(1),data)
```

ここで days-days(1) としたのは、days が 1900 年の元旦からの日数であるため、days の最初の要素を 0 日にして経過日数を横軸にしたいためである。plot(x,y) は、x と y の長さが同じベクトルである場合、そのデータの折れ線グラフを作成する。

データに不良値が認められず、潮汐の現実的な潮位変化をしていると判断できる場合は、次にデータをフーリエ変換しよう。それには、先日の授業で作成した mydft.m を用いる。

```
dt=3600;
X=mydft(data,dt);
```

ここで dt は観測時間間隔であり、データが毎正時に取られているため、データ間隔を 3600 秒とした。$mydft$ の結果として得られる X は複素数で、data をフーリエ変換したものである。

次にフーリエ変換後の関数 X の絶対値の自乗を以下の様にしてもとめよう。

```
X2=X.*conj(X);
```

ここで conj は X の複素共役をもとめる関数である。また、注意が必要なのは、$l = 0$ から $N2$ までの周波数についてしか計算していないということは、元々のフーリエ変換の $\pm\infty$ の範囲からすると、周波数が正である側である全体の半分のスペクトルしか計算していない。したがって、上記の計算で得たフーリエ変換をもとに計算したパワースペクトル密度を 2 倍してやらなければ、その積分値は、元の時系列が持つ分散を表す事が出来ない。

すなわち、上記で求めた X の絶対値の自乗 $X2$ を用いて、パワースペクトル密度 P は、

```
T=dt.*length(data);
P=2.*X2./T;
```

で求められる。ここで T は、対象とする時系列全体の時間区間長であり、観測時間間隔 dt にデータの個数を書けて求められる。

```
length(data);
```

で data の個数を数える事が出来るので活用しよう。

計算したパワースペクトル密度は、隣り合った値 20 個程度ずつを平均 (移動平均) しよう。移動平均を行う関数 runmean は、ここからダウンロードして使おう。例えば、平均を隣り合う 5 点で p について行った結果を p2 として出力したい場合、

```
P2=runmean(P,5);
```

とする。

計算結果を図示しよう。図示には、以下で定義される周波数 f を横軸に、算出したパワースペクトル密度 $P2$ を縦軸に取った対数図を用いる。周波数 f は、以下の様に定義できる。

```
df=1/T;
Fn=1/2/dt;
f=0:df:Fn;
```

ここで、df は、周波数の刻み幅で、算出した観測期間長 T の逆数である。また、Fn はパワースペクトル密度を計算する意味のある最大の周波数であった、ナイキスト周波数である。dt は以前定義した観測間隔の 3600 秒である。

周波数が準備できたら、図示は以下のように、

```
figure
loglog(f,P2,'r')
hold on
x=[1/12.42/3600 1/12.42/3600];
y=[min(P2) max(P2)];
loglog(x,y,'k')
xlabel('Frequency Hz')
ylabel('PSD m^2/Hz')
```

などとして、対数表で図示しましょう。この時、水平軸が周波数 f で、縦軸は移動平均したパワースペクトル密度 $P2$ です。

```
hold on
x=[1/12.42/3600 1/12.42/3600];
y=[min(P2) max(P2)];
loglog(x,y,'k')
xlabel('Frequency Hz')
ylabel('PSD m^2/Hz')
```

は、hold on でまず今の図に追加で作図できる様にします。次に x と y を夫々 2 点ずつ定義します。この x は主太陰半日周潮の周波数ですので、それと p の範囲でつくった線で、半日周潮がグラフのどこか知る事が出来ます。同様に日周期も比べるために線を引く事が出来ます。また xlabel(' ') や ylabel(' ') でグラフの軸にラベルをつけることが出来ます。' ' の間にラベルを記入しましょう。すると以下の様な図が書けるはずです。

また、元の時系列を、

```
plot(daynum-daynum(1),dataa)
```

などとして、潮位変化の図も作成しましょう。図示した時系列図は、以下の様になります。

図を画像として保存するには以下の様にします。

```
saveas(gcf,'tidedatafig','png')
saveas(gcf,'tidedatafig','jpg')
```

上の例の場合、tidedatafig.png あるいは tidedatafig.jpg という画像ファイルでつくった図が保存されます。或は、表示されたグラフのファイルメニューからエクスポートを選び、好きな画像の様式にして保存しましょう。

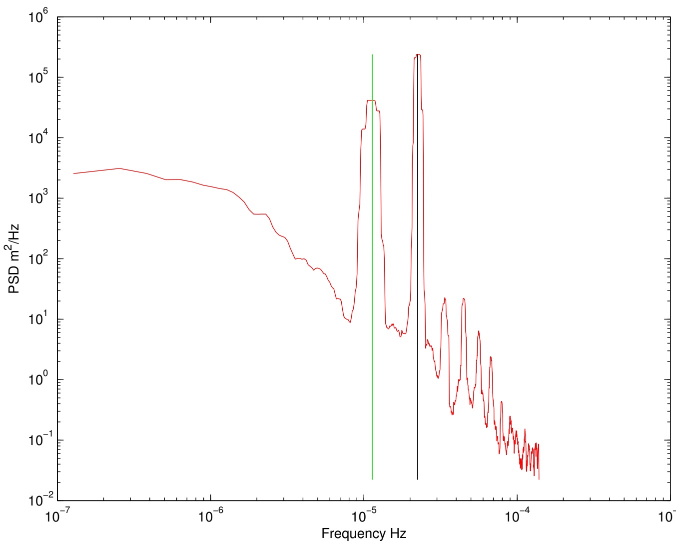


Figure 13:　潮位変動のパワースペクトル密度

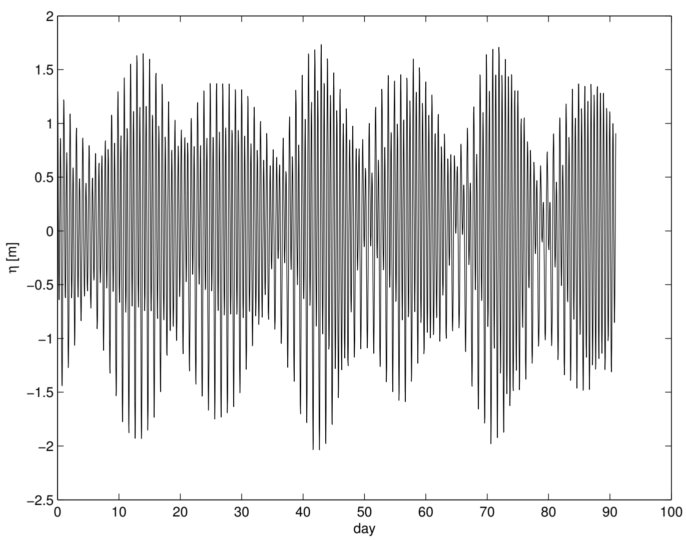


Figure 14:　潮位変動の時系列図

潮汐担当班の課題

潮汐に関してレポートと課題、発表を担当する事になった班は、以下の設問に、発表とレポートで必ず答えを示すこと。また、答えだけでなく何故その答えに至ったかを模式図や数式等を必要なら用いること。

1. 潮位データは、多くの場合１日に２回ずつ満潮と干潮を観測する。何故、１日に２回ずつ満潮と干潮を観測するのか説明せよ。
2. しかし、場合によっては、1日に1回しか満潮と干潮を観測しなかったり、2回の潮位が著しく異なる日潮不等が生じる。それは何故か。
3. 潮汐の振幅は、２週間程度の周期で大きくなったり小さくなったりする。前者を大潮、後者を小潮と呼ぶが、大潮と小潮は何故どの様に起こるのか。説明せよ
4. もし地球に月が衛星として存在しなければ、海洋の環境にどの様な影響を及ぼし得るか。

これらに加えて、発表とレポートでは、自分の出身地近辺の潮位がどのように変化しているのかを図とともにレポートにまとめること。図は、前述した潮汐の時系列図とパワースペクトル密度の図を作成して用いること。これらを前述した方法で画像として保存し、それらをワードファイルに貼付けてレポートを作成する事。
また、発表はパワーポイントを用い、スライドには設問の答えを論理的に説明する模式図等を入れるとともに、Matlab で作成した図を加えてそれらについても説明する事。発表は、15 分で質疑を数分とし、班の全員が分担すること。
ワードで作成したレポートの提出はここからログインして行って下さい。

5　内部波

沿岸域の海洋環境に多大な影響を及ぼしうる波動現象は、潮汐に伴う海面変動だけではありません。海洋は、海面近くの水よりも深いところにある水の方が重く、成層状態にあります。この成層した流体内部を伝わる波を内部波と呼びます。内部波は縦方向に伝わるため海面を水平方向にしか伝わることのできない表面波や、浅海波とは様子が全く異なります。内部波は、潮汐にともなう水深方向に一様な流れが海山等にぶつかって内部潮汐として生成されたり、表層混合層における混合現象によって、或は、風に伴う混合層の低周期振動によって生成されます。

内部波によってつくられる変動は、海面の粗度の変化として人工衛星から観測されます。これは、内部波が伝播する際、帯状かつ周期的に海面に収束域、発散域をつくる為です。

Figure 15:　SAR 画像に現れる内部波。画像は、MARSAIS ウェブサイトより。

　内部波の伝播の様子は、環境システム科学実験を受講していれば、連続成層中の内部波の実験で見たと思いますが、大変不思議な様相を呈します。

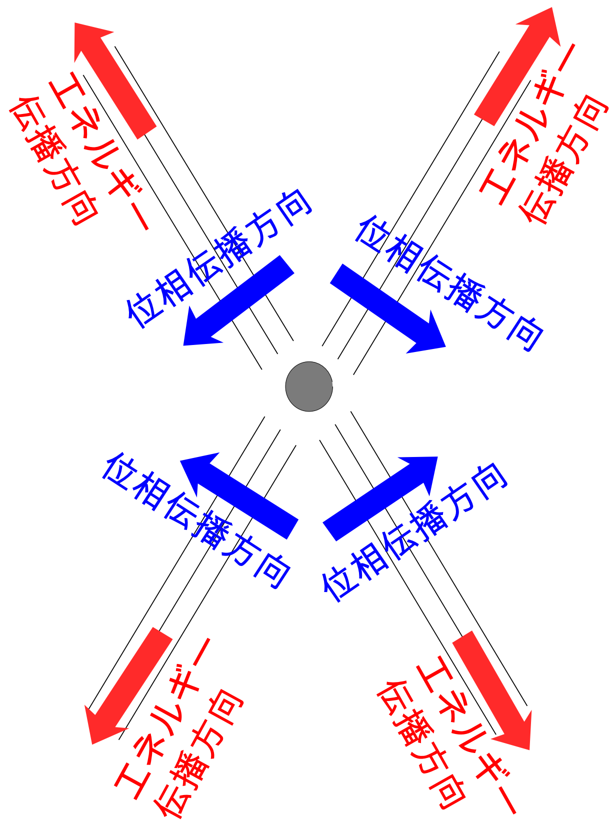


Figure 16:　中央の丸から発生して四方に伝播する内部波の様子。位相が伝播する方向と　　　　　　　　エネルギー伝播方向は直角である。

　内部波の伝播の様子を表した動画はここ (http://youtu.be/6YOM9HWmLQI) から見ることが出来ます。

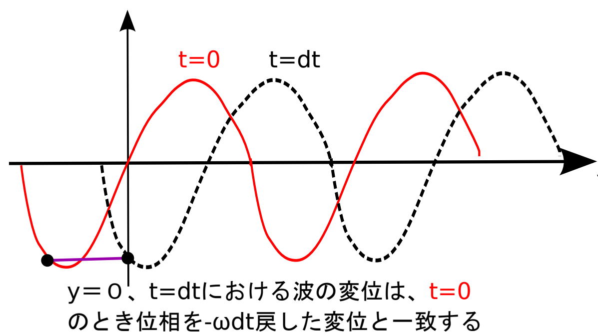
波の基礎

内部波に限らず、波に関してその位相や位相速度、波長や波数、周期や振動数の関係をお浚いしておこう。波は、その振幅を η として、三角関数等で表して議論されることが多い。例えば、1 次元の弦を伝わる波の振幅を、

$$\eta = \eta_o \sin(ly - \omega t) \tag{119}$$

で表すとしよう。ここで、l は y 方向の波の波数であり、波数と波長 λ_y は、$l = 2\pi/\lambda_y$ の関係を持つ。また、ω は内部波の振動数で波長 T と $\omega = 2\pi/T$ の関係を持つ。

今この波が dt 秒後、図中の破線で示す振動面をもつとし、即ち波が $y > 0$ の方向に dy 伝播している。



波の伝播。

今、この波の位相の進行とともに $y > 0$ 方向に移動するとすれば、η は変化しない。その為には、(119) の sin の括弧内で表される位相 $(ly - \omega t)$ が変化しないことが必要である。従って、以下の関係が導かれる。

$$ldy = \omega dt \tag{120}$$

$$\frac{dy}{dt} = c_y = \frac{\omega}{l}$$

即ち、y 方向の波の位相速度は、波の振動数 ω をその方向の波数 l で割ったものである。

$$\frac{dy}{dt} = c_y = \frac{\omega}{l} = \frac{\lambda_y}{T} \tag{121}$$

で、2π 位相が進む間に進む距離 λ_y を、同じく 2π 位相が進む間にかかる時間 T で割ったものがその方向に進む波の位相速度であることで容易に理解できよう。

5.1　内部波の分散関係

まずこれらの内部波の性質を知るために、運動方程式に正弦波や余弦波を表す流速や圧力変動を代入してみてそれらがどのように振る舞うか調べましょう。このために、まず水平方向 y と鉛直方向 z のみに伝播する内部波を考え、その内部波の運動を記述する方程式をたてましょう。運動方程式や浮力の式は全て移流項を省略したものです。また流体は非圧縮で、ブジネスク近似を施しています。(これらの言葉は重要な意味を持ちますが、説明は割愛します。) このため、ここで取り扱う内部波は線形波と呼ばれます。

$$
\begin{aligned}
\frac{\partial u}{\partial t} - fv &= 0 \\
\frac{\partial v}{\partial t} + fu &= -\frac{\partial p}{\partial y} \\
\frac{\partial w}{\partial t} &= -\frac{\partial p}{\partial z} + b \\
\frac{\partial b}{\partial t} + wN^2 &= 0 \\
\frac{\partial v}{\partial y} + \frac{\partial w}{\partial z} &= 0
\end{aligned}
\tag{122}
$$

ここで、u、v、w は内部波の流速、$b = -g\rho/\rho_o$ は内部波に伴う密度変化 ρ がうける浮力で、内部波によって上下した海水が周りよりも重ければ下向きに、軽ければ上向きにはたらきます。また、p は圧力を海水の標準密度 ρ_o で割った変数です。$N^2 = \partial\bar{b}/\partial z = -(g/\rho_o)\partial\bar{\rho}/\partial z$ は、ブラントバイサラ周波数、或は浮力振動数の自乗値です。この値が大きいとすなわち流体の成層が強い事を表します。この項は、この式で唯一存在する移流項ですが、これは内部波の上下運動によって浮力場 (密度場) が時間的に振動するため不可欠です。この N^2 は、背景の流体の成層を表すものですので、$\bar{\rho}$ や $\bar{b}$ は平均値で鉛直方向のみに変化するとします。内部波の変動は y と z 方向のみで発生しているため、x 方向には金太郎飴のように変化していないと仮定します。このため、x 方向の運動方程式で圧力傾度力は x 方向に内部波の圧力変化が無いため 0 となり、連続の式も x 方向の項はありません。

　この式の各変数に、波を想定した余弦と正弦の変動を次のような指数関

数として与えてみましょう。

$$\begin{Bmatrix} u \\ v \\ w \\ p \\ b \end{Bmatrix} \qquad \exp i(ly + mz - \omega t) \tag{123}$$

ここで、l や m は水平 (y 方向) と鉛直の波数で実数で定義されています。ω は、内部波の周波数です。複素関数で変数を表す事で余弦と正弦を同位相で考慮できます。(123) を元の式 (122) の各変数に代入すると以下の 5 つの式を得ます。

$$\begin{aligned} -i\omega u - fv &= 0 \\ -i\omega v - fu &= -ilp \\ -i\omega w &= -imp + b \\ -i\omega b + wN^2 &= 0 \\ ilv + imw &= 0 = 0 \end{aligned} \tag{124}$$

これらの式から、u、w、p、b を消去し整理すると以下の波数と周波数の関係式、分散関係が得られます。

$$\omega^2(m^2 + l^2) = l^2N^2 + m^2f^2 \tag{125}$$

この式を水平の波数と鉛直の波数の比を表す式として書き直すと、

$$\frac{l}{m} = \pm\sqrt{\frac{\omega^2 - f^2}{N^2 - \omega^2}} \tag{126}$$

となります。ここで左辺は実数である事を考えると、右辺の平方根の中身は必ず正でなければなりません。この条件を満たす内部波の周波数 ω の範囲について考えてみましょう。まず、重要なのは f と N の大きさです。コリオリパラメータは、中緯度域だと $10^{-4}\ \mathrm{s}^{-1}$ です。また、内部波が伝播するような成層した海洋では、浮力振動数 N は 10^{-2} 程度ですので、大概の場合 $f < N$ が成立しています。まず ω が N に大きさが近い場合について考えましょう。

この場合、$f < \omega$ なので分子は必ず正になります。一方分母は、$\omega < N$ なら正である事がわかります。したがって、この事から、内部波の周波数の上限は N であることがわかります。一方、ω が f に大きさが近い場合、分母は常に $\omega < N$ なので正になります。分子は、$f < \omega$ なら正になるので、したがって内部波の周波数の下限は f であることがわかります。すなわち、

$$f < \omega < N \tag{127}$$

を満たすような周波数でなければ内部波は存在できないという事が言えます。

また、(126) の左辺は、内部波の進む方向が水平面と成す角の tan を表します。この事は、内部波の周波数 ω が大きくなって、分子が増加し分母が減少すると、内部波の伝播方向がより垂直的になること、あるいは逆に内部波の周波数 ω が小さくなって、分子が減少し分母が増加すると、内部波の伝播方向がより水平的になることを表します。

(126) を波がつくる主立った流速ベクトルが沿う軸が水平面と成す角度 θ を用いて三角関数で表せば、以下の様に書け

$$\frac{l}{m} = \frac{\lambda_z}{\lambda_h} = \tan\theta = \pm\sqrt{\frac{\omega^2 - f^2}{N^2 - \omega^2}} \tag{128}$$

ここで、λ_z と λ_h は、ぞれぞれ鉛直と水平方向の波の波長です。この式は、また、同じ振動数の波でも、内部波が伝播する流体の浮力振動数 N が変化すれば、波の進む角度が変化することを意味します。浮力振動数 N は、海洋の表層混合層の下部や季節躍層で大きくなることが知られており、そこで極大値を持つことに成ります。したがって、ある N にちかい高振動数 ω を持つ内部波が N の極大層から N が減少する下向あるいは上向きに伝播する際、(128) の分母が小さくなるため、水平面と伝播方向の角度が大きくなり、波が鉛直的に立って伝播することに成ります。そしてある時 $N = \omega$ の、内部波の振動数と浮力振動数が等しくなったときに、分母が 0 になり、鉛直の波数が消え、波が反射します。この様に、振動数の比較的高い内部波は、浮力振動数 N の極大層に捕捉されることがあります (17)。

さらに、内部波が斜面上を伝播する際には、斜面の角度が内部波の浅海域への侵入の可否を決定付ける要因になります。これは、内部波の伝播する角度が、その振動数や成層で決まり、反射した波も振動数は変化しない事から、反射後の角度も、内部波の分散関係で規定されるためです。従って内部波の波群の伝播方向が水平面と成す角が、斜面よりも浅ければ、浅い方向に向かって波は反射する事が出来ず、よって浅海域へ伝播する事が出来なくなります。また、一方で、内部波の伝播角度が斜面のそれとほぼ同じような場

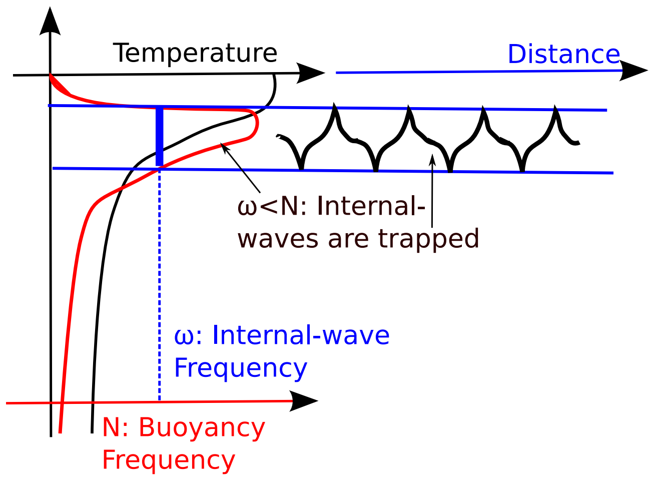


Figure 17: 振動数 ω の内部波が浮力振動数 N の極大層に補足される様子。実線のエネルギー伝播は、$\omega = N$ で上下方向が入れ替わり、反射する。

合には、図 (18) のように、反射した内部波と斜面角度もほぼ同一となるため、斜面の任意の場所で反射した内部波は斜面直上に密集し、たまった高エネルギの為に著しい流速を伴って砕波しやすい事が知られています。

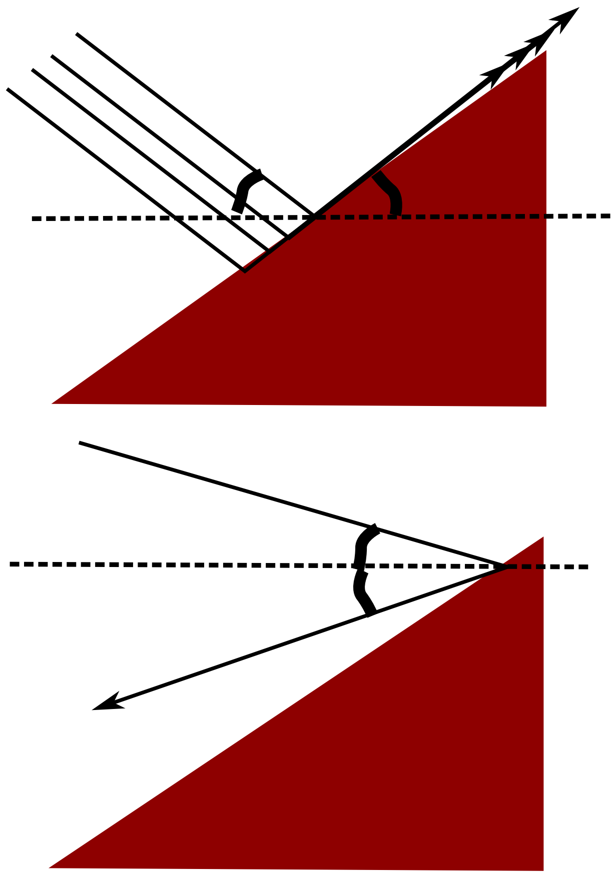


Figure 18: 振動数 ω である角度で伝播する内部波が斜面で反射する様子。上の図では、斜面直上で波束が密集する。下図では波は深い方へ反射される。

波の位相速度

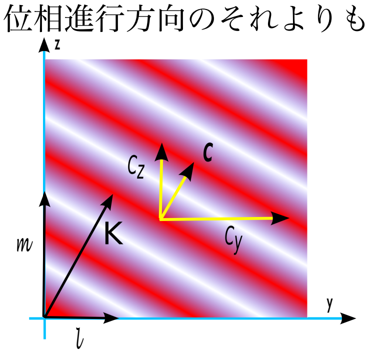
波の位相速度は、速度を求める軸が明らかであれば、その軸に沿った方向の波数で波の周波数を割ればよい。すなわち y 方向の位相速度と波数を c_y、l、z 方向については c_z、m とするとき、

$$c_y = \frac{\omega}{l}, \quad c_z = \frac{\omega}{m} \tag{129}$$

これは、周波数が周期の逆数であること、波数が波長の逆数である事を考えれば容易な事だ。軸に沿う位相速度がわかったので、波の位相の進む方向に沿って位相速度を出したいとする。この時速度であるので、当然位相の進む方向に沿って位相速度は、各軸の位相速度の合成で表されると考えてしまいそうであるが、これは誤りである。この事は、波数ベクトルが、

$$K^2 = l^2 + m^2 \tag{130}$$

で定義されている事と、波の位相と軸の関係を考えれば明らかとなる。すなわち、例えば図の右上方向に位相が進む波を考えたとき、当然位相の進行方向に沿った方向で単位長さあたりの波の数は、y 方向や z 方向に沿った波の数よりも大きく、また最大となることがわかる。言い換えれば、軸に沿って波の波長を考えたとき、位相進行方向に沿った場合に比べて、波を斜めに切る事になるため、波長が長く算出される事になる。一方、一波長の波は同じ時間である場所を過ぎていってしまうため、軸に沿った位相速度は、位相進行方向のそれよりも早いのである。



波の波数ベクトルと位相速度。赤い濃淡で波の峰と谷を表す。K、l、m はそれぞれ位相進行方向に沿った波数ベクトル、y 軸に沿った波数ベクトル、z 方向に沿った波数ベクトルである。これらには、$K^2 = l^2 + m^2$ の関係がある。C、C_y、C_z はそれぞれ位相進行方向に、y 軸に、z 方向に沿った位相速度ベクトルである。注意すべきなのは、位相速度のベクトルは通常の速度の合成に従わない。

波の位相速度　つづき

波数ベクトル $\mathbf{K} = (l, m)$ で定義される位相進行方向に沿う位相速度は、

$$\mathbf{c} = \frac{\omega}{K}\frac{\mathbf{K}}{K} \tag{131}$$

と書け、ここで、K は波数ベクトル $\mathbf{K}$ の大きさであり、従って $\mathbf{K}/K$ は、波数ベクトルの方向の大きさ 1 の単位ベクトルということになる。このことから、y 方向、z 方向の単位ベクトルをそれぞれ、i_y、i_z とすると、式 (131) が、

$$\mathbf{c} = \frac{\omega}{K}\frac{\mathbf{K}}{K} = \frac{\omega}{K^2}(i_y l + i_z m) \tag{132}$$

とかける事を表す。これは、各軸に沿った位相速度の合成、

$$\mathbf{c} \neq (i_y \frac{\omega}{l} + i_z \frac{\omega}{m}) \tag{133}$$

とは異なる。つまり、位相進行方向の位相速度は、(133) 右辺では表せない。

波の群速度

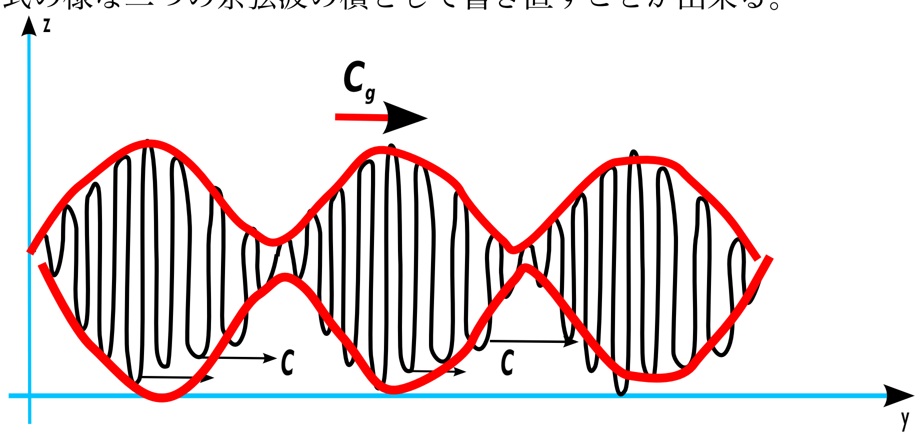
浅海波の波速は、周波数とは無関係で $\sqrt{gH}$ であった。このように波の速度が周波数によらない波を非分散波と呼ぶ。一方浅海波とは異なり、表面波や内部波は分散波である。これは、例えば池に石を投げ入れたときにできる表面波が様々な波長、振動数の波からなり、それぞれが異なる速度で進むことから「波が分散」するという観点からわかりやすい表現である。分散波では位相速度とエネルギーの進む速度がことなる。このことを以下の簡単な例で確かめよう。
今、周波数がそれぞれ、ω_1、ω_2 で波数が、k_1、k_2 の 2 つの波の合成を考えよう。

$$\eta = a\cos(k_1 x - \omega_1 t) + a\cos(k_2 x - \omega_2 t) \tag{134}$$

この合成波は二つの余弦波の和として表されているので、以下の和と積の公式を用いて

$$\cos A + \cos B = 2\cos(\frac{1}{2}(B-A))\cos(\frac{1}{2}(A+B)) \tag{135}$$

次式の様な二つの余弦波の積として書き直すことが出来る。



二つの若干異なる波数 (波長) と振動数 (周期) をもつ波の合成。合成によって振幅に大きな”うなり”が生じる。うなりの波長は、波数差 dk が小さい程長くなり、また周波数差 $d\omega$ が小さい程周期も長くなる。この差の比がうなりの進行速度・群速度を決める。この”うなり”の中では、波長の小さい波が進行している。

波の群速度　つづき

$$\eta = 2a\cos[\frac{1}{2}(k_2-k_1)x-\frac{1}{2}(\omega_2-\omega_1)t]\cos[\frac{1}{2}(k_1+k_2)x-\frac{1}{2}(\omega_1+\omega_2)t] \quad (136)$$

ここで、振動数と波数差をそれぞれ、$d\omega$、dk として微分で表し、その差が限りなく小さいとする。また、2 つの振動数と波数の平均として、$\omega=(\omega_1+\omega_2)/2$、$k=(k_1+k_2)/2$ を定義し、更に式を書き直す。

$$\eta = 2a\cos(\frac{1}{2}dkx-\frac{1}{2}d\omega t)\cos(kx-\omega t) \quad (137)$$

この積の形で表される二つの余弦波の後半は、平均の振動数と波数を持つ波の伝播を描写しており、一方、前半の余弦波は、その振幅を表すと捕らえることが出来る。即ち振幅自体も波として伝播している。この振幅の波は"うなり"であり、その振動数は $d\omega$ と微小であるため、周期は長く、波数は dk で微小であるため波長も長い。この"うなり"の進行速度は、

$$c_g = \frac{d\omega}{dk} \quad (138)$$

で表される。この"うなり"の進行の中を、平均の振動数と波数を持つ細かい波が伝播している。したがって、c_g は小さな波の群れを束ねた大きな振幅を持つ"うなり"の進行速度を決めているので、群速度と呼ばれる。また、この速度が実際にエネルギーが伝わる速度である。この様に、分散波の場合位相速度 c とエネルギーの伝わる群速度 c_g は異なる。

5.2 内部波の Ray Tracing

ここでは、この章の演習課題である内部波の Ray Tracing に関する基本式を導入します。この為に、まず以下の様な位相が α である波動を考えます。先と同様に複素指数関数を用いて正弦波と余弦波を同時に表します。例えば内部波の流速 u を

$$u = u_o e^{i\alpha} \tag{139}$$

としましょう。ここで、位相 $\alpha(y, z, t)$ は水平方向 y、鉛直方向 z、時間 t の関数です。即ち、波が伝播する時波の峰がある場所を位相 $0°$ とすれば、それは波が伝播することで、空間的にも時間的にも変化することを意味し、当たり前のことです。

この位相を空間方向に沿って偏微分すればその波の波数を得、また時間に沿って偏微分すれば振動数が得られます。即ち、

$$\frac{\partial \alpha}{\partial y} = l \tag{140}$$
$$\frac{\partial \alpha}{\partial z} = m$$
$$\frac{\partial \alpha}{\partial t} = -\omega$$

これは、波動解が (123) の様に $u = u_o \exp i(ly + mz - \omega t)$ などと表されることからよくわかります。また、内部波の振動数 ω は、(125) から明らかな様に、同じ波数 l や m を持っていても浮力振動数 N や、コリオリパラメータ f が空間的に変化すれば、変化します。或は逆に同じ N や f でも異なる波数 l、m を持つ波の振動数 ω は異なります。従って内部波の振動数 $\omega(l, m, y, z)$ は、空間と波数の関数です。即ち、

$$-\frac{\partial \alpha}{\partial t} = \omega(\frac{\partial \alpha}{\partial y}, \frac{\partial \alpha}{\partial z}, y, z) \tag{141}$$

と書く事が出来ます。この式 (141) を y や z で偏微分して有用な情報を得ましょう。するとそれぞれの偏微分で以下の 2 式を得ます。

$$-\frac{\partial^2 \alpha}{\partial y \partial t} = \frac{\partial \omega}{\partial l}\left(\frac{\partial^2 \alpha}{\partial y^2}\right) + \frac{\partial \omega}{\partial m}\left(\frac{\partial^2 \alpha}{\partial y \partial z}\right) + \frac{\partial \omega}{\partial y} \tag{142}$$
$$-\frac{\partial^2 \alpha}{\partial z \partial t} = \frac{\partial \omega}{\partial m}\left(\frac{\partial^2 \alpha}{\partial z^2}\right) + \frac{\partial \omega}{\partial l}\left(\frac{\partial^2 \alpha}{\partial y \partial z}\right) + \frac{\partial \omega}{\partial z}$$

また (138) から、y と z 方向の波の群速度は、それぞれ

$$\frac{dy}{dt} = c_g^y = \frac{\partial \omega}{\partial l}$$
$$\frac{dz}{dt} = c_g^z = \frac{\partial \omega}{\partial m} \tag{143}$$

であること。また、位相と波数の関係 (141) を用いれば、(144) は、

$$\frac{\partial l}{\partial t} + c_g^y \frac{\partial l}{\partial y} + c_g^z \frac{\partial l}{\partial z} = -\frac{\partial \omega}{\partial y}$$
$$\frac{\partial m}{\partial t} + c_g^y \frac{\partial m}{\partial y} + c_g^z \frac{\partial m}{\partial z} = -\frac{\partial \omega}{\partial z} \tag{144}$$

と波数の時間的な変化を記述することが出来ます。ここで左辺第 2、第 3 項は群速度にともなう波数の移流項と解釈できますので、ラグランジュ微分と同様な考え方をすれば、波群とともに波を群速度 c_g^y や c_g^z で追跡したときの波数の時間変化を記述する式を以下の様に書く事が出来ます。

$$\frac{dl}{dt} = -\frac{\partial \omega}{\partial y}$$
$$\frac{dm}{dt} = -\frac{\partial \omega}{\partial z} \tag{145}$$

ここで、$d/dt = \partial/\partial t + c_g^y \partial/\partial y + c_g^z \partial/\partial z$ で、群速度で波群を追跡した時間微分です。即ち、ある瞬間の内部波の波数の変化率は、内部波の振動数 $\omega(l, m, y, z)$ の空間的な勾配 $-\nabla\omega$ から知ることが出来ます。$-\nabla\omega$ は、(125) に従ってある波数、ある N、f に依存し空間に分布します。

また、内部波の波群の進行は全てその群速度 c_g^y、c_g^z で記述することが出来ます。即ち、内部波の波群の位置を $\mathbf{r}$ と位置ベクトルで、群速度もベクトル $\mathbf{c_g} = (\mathbf{i_y} c_g^y + \mathbf{i_z} c_g^z)$ で表す時、

$$\frac{d\mathbf{r}}{dt} = \mathbf{c_g} \tag{146}$$

と書けます。これは、速度 $\mathbf{c_g}$ で進む運動ですので非常に単純です。

当然ながら、この内部波の振動数は波群を追跡する時変化しません。即ち $\omega = \mathrm{constant}$。この事は、以下の内部波の波群を追跡した振動数の変化率の式を見れば歴然として明らかとなります。

$$\frac{d\omega}{dt} = \frac{\partial\omega}{\partial l}\frac{dl}{dt} + \frac{\partial\omega}{\partial m}\frac{dm}{dt} + \frac{\partial\omega}{\partial y}\frac{dy}{dt} + \frac{\partial\omega}{\partial z}\frac{dz}{dt} \tag{147}$$

これに、式 (144) と (146) を考慮すれば右辺が 0 になるからです。これらのことから以下の様に、ある場所から伝播し始めた、ある波数 (l_o, m_o) を持つ振動数 ω の内部波の波群の任意の時間における位置を計算することが可能です。

ただし、これらの内部波の波群の進行を計算するにあたっては、想定する内部波の波長で、内部波が伝播する媒体の性質が大きく変化しないことが必要になってきます。Ray Tracing は、これを仮定して行います。

5.2.1 水平流の鉛直方向の変化：シア

前述した内部波の波群の追跡は、これに空間的に変化する平均流が加わると少し複雑になります。例えば、水平的な流れが鉛直的に変化する場合を考えましょう。まず内部波が伝播する媒体が動いているわけですから、そこを伝播する内部波も一緒に流れとともに動きます。このとき、ある定点に固定して内部波の振動数を計測した場合、流されながら伝播する内部波の振動数は、内部波の波群を追跡した場合と違って計測されます。これは、おなじみのドップラー効果です。この平均流 $V(z)$ に伴ってドップラー効果を受けた定点観測で得られる振動数を ω とし、流れに乗った観測者が観測する振動数を ω_r すれば、

$$\omega = \omega_r(l, m, y, z) + lV(z) \tag{148}$$

と書けます。これは、$l > 0$ で y 軸正方向に伝わる波の定点観測で得られる振動数が、流速が同じく y 軸正方向に流れるときは、増加し、負の方向に流れるときは減少することを表しています。この内部波の波群の伝播する速度は、ドップラー効果を受けた振動数をその速度の向きに偏微分して得られますので、例えば y 方向の波群伝播速度は、

$$\frac{dy}{dt} = \frac{\partial\omega}{\partial l} = \frac{\partial\omega_r}{\partial l} + V(z) \tag{149}$$

と書け、つまり波群は、y 方向に平均流速と流れに対して相対的な群速度の和で表されることがわかります。ちなみに、鉛直の伝播速度は、

$$\frac{dz}{dt} = \frac{\partial \omega}{\partial m} = \frac{\partial \omega_r}{\partial m} \tag{150}$$

と、水平流の影響を受けなくなります。

次に波数の変化はどうなるでしょうか。まず水平の波数 l について考えてみましょう。(146) から、同様に流れに乗らず定点に固定した観測者にとっては、いかが成り立つはずです。

$$\frac{dl}{dt} = -\frac{\partial \omega_r}{\partial y} - l\frac{\partial V}{\partial y} = -\frac{\partial \omega_r}{\partial y} \tag{151}$$

これは、ここで $V(z)$ を z のみの関数としたためです。一方、鉛直の波数 m についてはどうでしょうか。

$$\frac{dm}{dt} = -\frac{\partial \omega_r}{\partial z} - l\frac{\partial V}{\partial z} \tag{152}$$

と書け、平均の水平流の鉛直勾配によって m が増減することがわかります。(147) と同様に、上述した (150)、(151)、(152) から、定点で観測できる振動数 $\omega =$(148) は、内部波の波群を追跡するとき一定となる事がわかります。ここで、重要なのは、流れとともに動く観測者の計測する振動数 ω_r ではなく ω が、波群を追跡して一定となることです。

また、成層 N、コリオリパラメータ f が一定で、従って ω_r が空間の関数で無い場合には、(151)、(152) は、更に簡単になり、

$$\begin{aligned} \frac{dl}{dt} &= 0 \\ \frac{dm}{dt} &= -l\frac{\partial V}{\partial z} \end{aligned} \tag{153}$$

となります。すなわち、水平の波数は波群を追跡して変化しないこと、鉛直の波数は水平流の鉛直勾配のみによって変化する事がわかります。

いま、内部波の波群が下から上向きに且つ y の正の向きに伝播し、平均流の流速 $V(z)$ が上方向に増加するときについて考えてみましょう (図 19)。

この場合、位相ベクトルの軸に沿う成分で定義される波数は、位相鉛直伝播方向がエネルギー鉛直伝播方向とは逆の下向きになるためそれぞれ、$m < 0$、$l > 0$ となります (図 19)。(154) から、元々 $m < 0$ で負であった鉛直の波数 m は、$dV/dz > 0$ と水平流が増加する中を、波群が上向きに伝播する際、l は正であるので、更に減少し、負の波数の絶対値 $|m|$ は増加しつづける事になります (図 19)。波数が増加することで、内部波のエネルギー密度も増加します。(154) より、m が増加する中、l は全く増加しません。また、(148) から流速が増加していくと $\omega - lV$ が徐々に減少していき、流れに乗った観測者が測定する振動数 ω_r は、内部波の最小振動数である、コリオリパラメータ f に限りなく近づいていきます。$\omega_r = f$ なると内部波のつくる流速場は完全に水平方向になり、鉛直方向のエネルギー伝播は不可能になってしまいます。このような層の事を"Critical Layer"と呼びます (図 19)。そこでは、内部波のエネルギーが平均流に吸収されたり、内部波の砕波が発生する事が知られています。

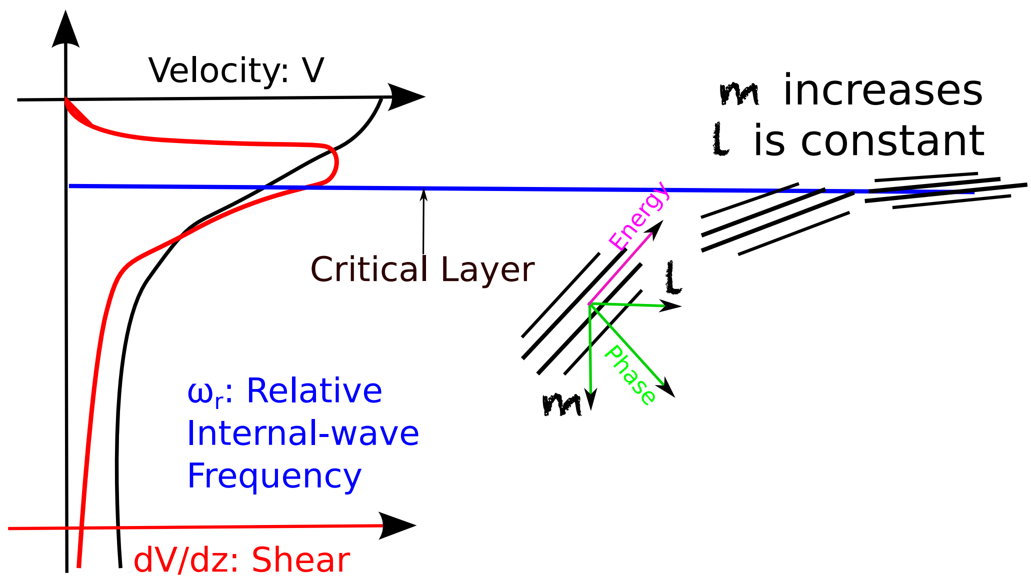


Figure 19: 流速が上向きに増加する中を鉛直上向きにエネルギー伝播する波群は、水平波数 l は変化しないのに対し、鉛直波数 m の増加を経験する。波の相対振動数 ω_r は、次第に、内部波の最小振動数であるコリオリパラメータ f に限りなく近づいていく。そこでは鉛直の群速度が限りなく 0 に近づく。この層を Critical Layer と呼ぶ。

5.3 分散関係から群速度を求める

さて、式 (138) から、内部波のエネルギーが伝播する速度、群速度は内部波の振動数を、求めたい群速度の方向の波数で微分すれば良いことが解りました。ここでは、(125) で求めた内部波の分散関係を少し簡単化して、群速度の式を導きましょう。

$$\frac{l^2}{m^2} = \frac{\omega^2 - f^2}{N^2 - \omega^2} \tag{154}$$

今、取り扱う内部波の振動数が N よりもずっと小さい、周期の長い内部波であるとします。とはいえ $\omega > f$ を満たすとします。従って $N \gg \omega$ ですので、(154) の右辺の分母の ω^2 は N^2 に比べれば無視できる程小さいということになります。すると、内部波の分散関係は、もっと単純になり、

$$\omega^2 = \frac{l^2}{m^2} N^2 + f^2 \tag{155}$$

となります。

従って、時間的に位相が進む正の内部波の振動数は、

$$\omega = \sqrt{\frac{l^2}{m^2} N^2 + f^2} \tag{156}$$

となります。この比較的周期の長い内部波の振動数を、波数で微分して群速度を求めましょう。まず、y 軸に沿う波数 l で偏微分します。

$$\begin{aligned}\frac{\partial \omega}{\partial l} &= \frac{\partial}{\partial l}\left(\frac{l^2}{m^2} N^2 + f^2\right)^{\frac{1}{2}} \\ &= \frac{1}{2}(\omega^2)^{-\frac{1}{2}} \frac{\partial \omega^2}{\partial l} \\ &= \frac{l N^2}{m^2 \omega} = c_g^y.\end{aligned} \tag{157}$$

同様に鉛直方向の波数 m で偏微分すれば、

$$\begin{aligned}\frac{\partial \omega}{\partial m} &= \frac{1}{2}(\omega^2)^{-\frac{1}{2}} \frac{\partial \omega^2}{\partial m} \\ &= -\frac{l^2 N^2}{m^3 \omega} = c_g^z\end{aligned} \tag{158}$$

となります。

群速度 $\mathbf{c_g}$ は、位相速度とは異なり、その合成ベクトルは通常の速度ベクトルと同様に以下の様に求められます。

$$\mathbf{c_g} = c_g^y \mathbf{i_y} + c_g^z \mathbf{i_z}. \tag{159}$$

ちなみに、位相速度のベクトルは (159) のようなベクトルの合成の法則に従わず、位相の伝わる方向の位相速度ベクトル $\mathbf{c}$ は、

$$\mathbf{c} = \frac{\omega}{K^2}(l\mathbf{i_y} + m\mathbf{i_z}) \tag{160}$$

を満たすのでしたね。ここで、K は位相速度ベクトル $\mathbf{c}$ の大きさです。このことは、以下のクイズの大きなヒントです。

クイズ

内部波の位相速度ベクトルと群速度ベクトルは直交する事を示せ。式 (159) と (160) の内積をとってみましょう。内積が 0 なら二つのベクトルの角度は? 同様に、連続の式から内部波の流速ベクトルと、位相ベクトルが直交する事を示せ。

6 Matlabを使って内部波の伝播を計算しよう

ここでは、内部波の波群を追跡する計算をMatlabで行ってみましょう。

簡単のため、此処で取り扱う内部波は、比較的波長が長く群速度が単純に(158)や(159)で書き表せる、長波長の内部波であるとします。また、ある角度をもつ斜面を想定してそこでの反射をシミュレーションしましょう。

成層状態は鉛直方向のみの関数$N(z)$で表される単純なケースを想定します。従って、ある波数l、mを持つ内部波の振動数ωは(156)から、同じく鉛直方向のみの関数で表されるため、(146)から、水平の波数lは波群を追跡して変化しないということが解ります。従って内部波の波群の波数lとmの初期値を設定したら、lの変化については考慮する必要がないことが解ります。一方鉛直方向の波数kは変化します。しかしながら、波長の長い内部波の分散関係(155)から、$l/m = \tan\theta$を求めることが可能です。lは一定で変わりませんから、$m = l\tan\theta$を満たすmを計算すれば、mの時間変化を計算する手間が省けます。波群は群速度で伝播するので、以下の式を初期値を与えて数値的に計算して波群を追跡することが可能です。

$$\begin{aligned} \frac{dy}{dt} &= c_g^y = \frac{lN^2}{m^2\omega} \\ \frac{dz}{dt} &= c_g^z = -\frac{l^2N^2}{m^3\omega} \end{aligned} \tag{161}$$

以上のことから、今回の単純なケースにおける波群の追跡を次の様なプロセスで行うことが可能です。

- 1 初期条件の内部波の位置$(r) = (y_o, z_o)$、波数$(l_o,\ m_o)$を決める。それを現在の位置(y_n, z_n)、波数(l_n, m_n)とする。
- 2 現在の波数$(l_n,\ m_n)$、$N(z)$、fと分散関係(156)を用いて振動数ωの空間分布を得る。
- 3 波数$(l_o,\ m_o)$、$N(z)$、fと式(158)、(158)を用いて、群速度c_g^yとc_g^zを求める。
- 4 求めた群速度を用いて、式(161)を時間積分し、次のステップの波群の位置$\mathbf{r} = (y_{n+1}, z_{n+1})$を計算する。
- 5 分散関係(156)から、$\tan\theta$を算出し$m = l_o\tan\theta$から新しい波数(l_o, m_{n+1})を計算する $\rightarrow$ ステップ2に戻る。

ステップ 5 では、鉛直の波数 m の符号が海底斜面での反射が無い限り変わらないことに注意して下さい。また l は変化しないので、当然符号も不変です。

この波群の伝播を表す式 (161) は、このままだと微分方程式ですので計算機で直接計算することができません。そこで、この式を離散化してみます。離散化とは、コンピューターで行う、四則演算で計算できる様、方程式を書き直す事です。具体的には、次の様なものが上式を離散化したものになります。

$$\begin{aligned} \frac{y_{n+1} - y_n}{\Delta t} &= \frac{1}{2}(c^y_{g_n} + c^y_{g_{n+1}}) \\ \frac{z_{n+1} - z_n}{\Delta t} &= \frac{1}{2}(c^z_{g_n} + c^z_{g_{n+1}}) \end{aligned} \tag{162}$$

ここで、$n = 1, 2, 3, \cdots$ は離散ステップを表し Δt は、その時間間隔、$n+1$ は 1 ステップ未来の離散ステップと言う事になります。即ち、時刻は $n = 1$ で初期の時刻 $t = 0$ を表すと定義すると、$t = (n-1) \times \Delta t$ と書く事が出来ます。ここでは、右辺の項：群速度を求めるときに、未来のステップと現在のステップでの波数 (l, m) と浮力振動数 N を使って (158) から算出される平均的な群速度であるとしておきましょう (ただし l は一定)。しかしながら、右辺第二項は、未知の未来の群速度を使って計算しなければならない事になります。現実的には、これに近い方法で、次のステップの波群の位置を求める事を考えた方が良さそうです。例えば、1 ステップ未来の波群位置の推測値を $y^\star$、$z^\star$ として以下の離散方法でこれを求めることにします。

$$\begin{aligned} \frac{y^\star - y^n}{\Delta t} &= c^y_{g_n} \\ \frac{z^\star - z^n}{\Delta t} &= c^z_{g_n} \end{aligned} \tag{163}$$

即ち、1 ステップ未来の波群の位置の推定値は、簡単に現在の波群がもつ群速度から求めるとします。

$$\begin{aligned} y^\star &= y_n + \Delta t c^y_{g_n} \\ z^\star &= z_n + \Delta t c^z_{g_n} \end{aligned} \tag{164}$$

次に、これらの 1 ステップ未来の波群位置の推定値における浮力振動数 $N^\star$ や、鉛直波数 $m^\star$ を求め、(158)、(159) から波群の群速度の推定値 $c^{y\star}_g$、$c^{z\star}_g$ を得ることが出来ます。ここで、l は一定です。これらの群速度の推定値が

式 (162) の $c^y_{g_{n+1}}$ や $c^z_{g_{n+1}}$ と同等であると見なし、それらに代入し、右辺を 1 ステップ未来の推定値と現在の群速度から求める事にしましょう。即ち、

$$
\begin{aligned}
y_{n+1} &= y_n + \Delta t \frac{1}{2}(c^y_{g_n} + c^{y\star}_{g_n}) \\
z_{n+1} &= z_n + \Delta t \frac{1}{2}(c^z_{g_n} + c^{z\star}_{g_n})
\end{aligned}
\tag{165}
$$

このような若干面倒な方法で次のステップを計算するのは、この方法が比較的誤差が小さく (2 次のオーダー)、計算も安定し易くなるためです。

それでは、実際にこれらのことを Matlab で計算していきましょう。まず各種初期値を設定し時間積分を行うプログラムは以下の様なものに成ります。

```
\% 計算するケースの名前
runname='IWTracw01';
\% 内部波が伝播する領域範囲を指定　下限値[ 上限値]
yrange = [0 40];
zrange = [-1000 0];
\% 内部波の初期位置　Yo [km] Zo [m]
Yo=2;
Zo=-5;
\% 内部波の初期波数　Lo [rad/m] Mo [rad/m]
Lo=1e-4;
Mo=2e-2;

\% 成層の度合いを調整するパラメータが大きいと強い成層が表層に限定される: delz [kg/m]
delz=0.02;

\% 海底斜面の傾斜度縦横比: 大きいと傾斜がきつい
slope=0.05;

\% 内部波の軌跡を書く頻度何計算ステップ毎か
plotstep=5;

\% まず内部波が伝播する領域や成層場を計算
[y,z,N,f,Liw,Miw,omgiw,Yiw,Ziw,AB,maskslope]=initializeiw(yrange,zrange,Yo,
     Zo,Lo,Mo,delz,slope);

\% 得られた浮力振動数を色で図示
subplot(2,1,1)
pcolor(y./1000,z,N.*maskslope)
xlabel('Y [km]')
ylabel('Z [m]')
shading flat
colorbar
hold on
\% その上に初期の波群位置をプロット
plot(Yiw,Ziw,'k-x')

\% 計算時間間隔 [s]
dt=100;
```

```
\% 計算時間 [day]
days=10;
times=days.*86400;
stepn=times./dt;
\% 波の反射の決定と群速度に必要なの波群位置における値を内挿oN
Niw=interp2(y,z,N,Yiw,Ziw);

\% 波群の軌跡を格納する変数を初期化
Yiws=zeros(stepn,1);
Ziws=zeros(stepn,1);

\% 動画ファイルを作成
aviobj = avifile('IWtracing01.avi', 'compression', 'Cinepak');
\% 計算の開始
j=0;
F = moviein(stepn./plotstep+10);
for i=1:1:stepn
    \% 現在の時刻
    timenow=dt.*(i-1);
    datenow=datenum(timenow./86400);
    title(datestr(datenow))
    \% 現在の波群の群速度を計算
    [Cgyiw,Cgziw]=compCg(y,z,Liw,Miw,Niw,f,Yiw,Ziw,omgiw);

    \% 現在からステップ未来の波群座標の推定値を算出する1
    Yguess=Yiw+Cgyiw.*dt;
    Zguess=Ziw+Cgziw.*dt;
    \% 推定位置が範囲外に成った場合、便宜上境界にあるとする
    if Zguess>0
        Zguess=0;
    end
    if Zguess<zrange(1)
        Zguess=zrange(1);
    end
    if Yguess<yrange(1)*1000
        Yguess=yrange(1)*1000;
    end
    if Yguess>yrange(2)*1000
        Yguess=yrange(2)*1000;
    end
    \% 波の波群群速度に必要なの波群推定位置における値を内挿N
    Niw=interp2(y,z,N,Yguess,Zguess);

    \% 現在からステップ未来の波群群速度の推定値を算出する1
    [Cgyiw2,Cgziw2]=compCg(y,z,Liw,Miw,Niw,f,Yguess,Zguess,omgiw);

    \% 現在からステップ未来の波群座標を算出する1
    Yiw=Yiw+0.5.*(Cgyiw+Cgyiw2).*dt;
    Ziw=Ziw+0.5.*(Cgziw+Cgziw2).*dt;
    Yiws(i,1)=Yiw;
    Ziws(i,1)=Ziw;
    \% 波の反射の決定に必要なの波群位置における値を内挿N
    Niw=interp2(y,z,N,Yiw,Ziw);

    \% 波の反射を計算
    [Yiws, Ziws,Miw,Liw]=wavereflection(Yiws, Ziws,Niw,omgiw, AB,Miw,Liw,i);

```

```
    Yiw=Yiws(i);
    Ziw=Ziws(i);

    \% 次のステップの為に波の反射後の波群位置における浮力振動数値を内挿
    Niw=interp2(y,z,N,Yiw,Ziw);

    if Yiw<yrange(1)*1000
        disp('IW has gone outside1');
        break
    end
    if Yiw>yrange(2)*1000
        disp('IW has gone outside2');
        break
    end
    if Ziw<zrange(1)
        disp('IW has gone outside3');
        break
    end
    \% 波の縦横比  tan θの絶対値を計算する
    taniw=sqrt((omgiw.^2-f^2)./Niw.^2);
    Mabs=abs(Liw)./taniw;
    if Miw>=0
        Miw=Mabs;
    elseif Miw<0
        Miw=-Mabs;
    end


    if mod(i,plotstep)==0
        j=j+1;
        plot([Yiws(i-plotstep+1) Yiws(i)]./1000,[Ziws(i-plotstep+1) Ziws(i)],'k-x')
        \% 現在の図を動画のフレーム用に取り出す
        F = getframe(gcf);
        \% 取り出したフレームを動画ファイルに書き込む
        aviobj = addframe(aviobj,F);
    end

end
\% 動画ファイルを閉じる
aviobj = close(aviobj);


\% 後で必要な変数を保存
save(runname,'y','z','N','f','Yiws','Ziws','Yo','Zo','Lo','Mo','delz','slope');
```

この上記のプログラムの最初では、内部波が伝播するモデル領域を設定しています。それを行う Matlab 関数を作成します。その関数を initializeiw.m としましょう。

```
function [y,z,N,f,Liw,Miw,omgiw,Yiw,Ziw,AB,maskslope]=initializeiw(yrange,zrange,Yo,Zo,Lo,Mo,delz,slope)
\% this program is to prepare model domain for the
\% -internalwave ray tracing .

```

```
\% 入力値
\% yrange: 水平方向の範囲 [km] 例えば [0 で100] 0−−−100の水平領域を定義km
\% zrange: 鉛直方向の範囲 [m] 例えば [−100 で0] −100−−−0 の深さ領域を定義m
\% Yo: 内部波波群の最初の位置の座標 y [km]
\% Zo: 内部波波群の最初の位置の座標 z [m]

\% 計算領域 y−z 面の定義
\% まず、とからyrangezrange101 x の格子となるよう格子の刻み幅101 dy dz を逆算

\% yrange, の単位をに変換Yom
yrange = 1000.*yrange;
Yiw=1000.*Yo;
Ziw=Zo;

dy=(yrange(2)−yrange(1))./100;
dz=(zrange(2)−zrange(1))./100;

\% そのdy を用いてdz meshgrid を使って格子を生成
[y, z]=meshgrid(yrange(1):dy:yrange(2), zrange(1):dz:zrange(2));


\% 水平座標の大きい側に岸があることを想定して海底斜面をから計算slope
\% 斜面の最も浅い深さを丁度水深の倍とし、0.85が斜面を成す水平距離で斜面の高さを割ったslope
\% もでであることから、斜面の横幅は、以下で計算可能
delyslope=0.5*(zrange(2)−zrange(1))/slope;

\% 斜面上の２点の座標は、[y1 z1], [y2 z2とすると、以下となり]
y1=yrange(2)−delyslope;
y2=yrange(2);
z1=zrange(2);
z2=zrange(1)+0.85*(zrange(2)−zrange(1));
\% この斜面を表す次式1 Zs=Ay+B のは直線の傾き、は切片なのでAB
A=slope;
B=z2−slope.*y2;

\% 斜面内の点であることを表す、やと同じサイズの行列を生成yz
\% 各格子点で上で求めた直線の式を計算−−> 斜面の座標を得る
slopez=A.*y+B;
AB=[A B];
\% 斜面の座標よりが小さいところをそれ以外をとする。zz01
\% が海水領域、が斜面内部を表す。10
maskslope=double(z>=slopez);
maskslope(maskslope==0)=NaN;

\% 密度の計算
\% 標準的な海水密度1025kg/mを定義^3
rhoref=1025;
\% 重力加速度 G
G=9.81;
\% 入力値を元に、密度の鉛直分布を計算delz
rho=rhoref−z.*delz;
\% 浮力振動数を計算するため密度の鉛直勾配を計算
[rhoy,rhoz]=gradient(rho,dy,−dz);
\% 浮力振動数 N は、
N=sqrt(−G.*rhoz./rhoref);

\% コリオリパラメータは中緯度域の値で定義
```

```
f=8.5e−5;

Liw=Lo;
Miw=Mo;

\% 内部波の振動数の空間分布を計算
omg=sqrt(N.^2.*(Liw/Miw).^2+f^2);
\% 波群の振動数を内挿
omgiw=interp2(y,z,omg,Yiw,Ziw);

\% 内部波の振動数の空間分布を計算
omg=sqrt(N.^2.*(Liw/Miw).^2+f^2);
\% 波群の振動数を内挿
omgiw=interp2(y,z,omg,Yiw,Ziw);

\% もし内部波の位置が格子の範囲外、エラーを表示させる
if Yo < yrange(1) | yrange(2)<Yo
    error('Yo is out of range')
end
if Zo < zrange(1) | zrange(2)<Zo
    error('Zo is out of range')
end
\% 内部波の鉛直位置が斜面内にある場合には、エラーを表示させる
if slopez>Zo
    error('IW is in bottom slope')
end
```

次に現在の波数 (l_n, m_n) から内部波の振動数 ω の空間分布を求め、また波の位置 (y_n, z_n) での群速度 $(c^y_{g_n}, c^z_{g_n})$ を計算する Matlab 関数を compCg.m という Matlab 関数として作成します。

```
function [Cgyiw,Cgziw]=compCg(y,z,Liw,Miw,Niw,f,Yiw,Ziw,omgiw)
\% this program is to obtain internal−wave group velocities
\% along the tracing internal−wave ray.
\%
Cgyiw=Liw.*Niw.^2./ (Miw.^2 .* omgiw);
Cgziw=− Liw.^2.*Niw.^2./ (Miw.^3 .* omgiw);
```

また、メインのプログラム中では、内部波の斜面上での反射や海面での反射、また、浮力振動数 N が内部波の振動数 ω よりも小さくなっては成らないため、$N \le \omega$ での反射も考慮する必要があります。それを行うのが、wavereflection.m です。

```
function [Yiws, Ziws,Miw,Liw]=wavereflection(Yiws, Ziws,Niw,omgiw,AB,Miw,Liw
    ,i)

\% 波の反射を考える
\% もし新しい波の位置が斜面内ならその分を縦方向に折り返して反射させる
\% また鉛直波数の符号も変えるMiw
\% まず波群水平位置における斜面の高さを求める
slopez=AB(1).*Yiws(i)+AB(2);
if Ziws(i)<=slopez
    \% 斜面を横切る波群伝播の軌跡の直線の式を求める
    Aiw=(Ziws(i)-Ziws(i-1))./(Yiws(i)-Yiws(i-1));
    Biw=Ziws(i)-Aiw.*Yiws(i);
    \% 斜面を表す直線と斜面を横切る波群伝播の軌跡の直線が接する水平位置は、
    Ycross=(AB(2)-Biw)./(Aiw-AB(1));
    \% 斜面を表す直線と斜面を横切る波群伝播の軌跡の直線が接する鉛直位置は、
    Zcross=Aiw.*Ycross+Biw;
    \% 斜面内にある軌跡の鉛直方向の距離は
    dzslope=Zcross-Ziws(i);
    \% この距離の2倍を足した位置に反射した波はあるはず。またの符号を反転Miw
    Ziws(i)=Zcross+2.*dzslope;

     \% もし鉛直方向に反射させても未だ斜面内に内部波がある場合は、水平波数の符号を反転
    if Ziws(i)<=slopez
        dyslope=abs(Yiws(i)-Ycross);
        Yiws(i)=Ycross-2.*dyslope;
        disp('refrection backward')
        Liw=-Liw;
    else
        disp('refrection forward')
        Miw=-abs(Miw);
    end
elseif Ziws(i)>=0
    dzsurf=Ziws(i);
    Ziws(i)=Ziws(i)-2.*dzsurf;
    Miw=abs(Miw);
    disp('refrection at surface')
elseif omgiw>Niw
    disp('refrection by N')
    Miw=-Miw;
    \% 海面での反射は簡単
end
```

これらのプログラムを書き、同じフォルダに保存後、Matlab のワークスペースをそこへ移動して、メインプログラムの名前をコマンドウィンドウに打ち、プログラムを実行してみましょう。すると波群が移動するアニメーションが描き出されます。

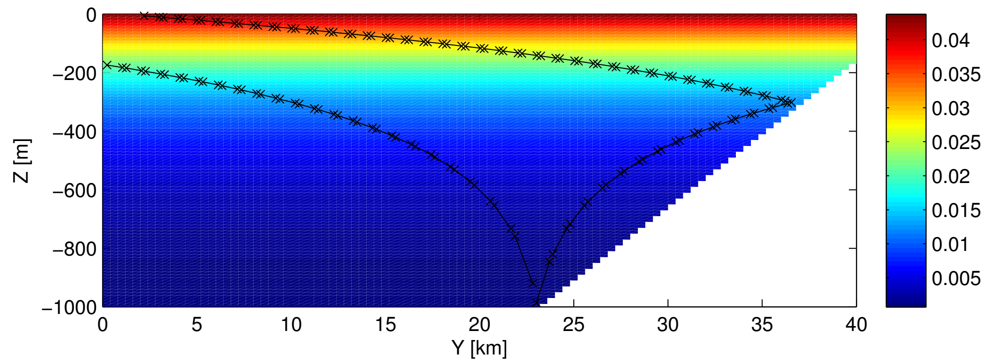


Figure 20: 色は、浮力振動数 (rad/s) を示す。内部波の軌跡を実線とバツ印で、斜面を白色で示す。

内部波担当班の課題

内部波に関してレポートと課題、発表を担当する事になった班は、以下の設問に、発表とレポートで必ず答えを示すこと。また、答えだけでなく何故その答えに至ったかを模式図や数式等を必要なら用いること。

1. 波の位相速度と群速度とは何か説明せよ。また、何故群速度はエネルギーが運ばれる速度と言えるのか説明せよ。

2. 内部波の振動数によって内部波の伝播する角度は変化する。内部波振動数の変化に伴ってどの様に伝播角度が変化するか説明せよ。

3. 内部波の位相速度ベクトルと群速度ベクトルは直交する。なぜ直交するのか説明せよ。ヒント: 式 (159) と (160) の内積をとること。内積が 0 なら二つのベクトルの角度は?

4. 内部波はその振動数によって、ある角度の海底斜面を持つ浅海域に侵入できたり、出来なかったりする。また、内部波伝播角と斜面角度が同等である場合、斜面直上で乱流混合が発生し易い。それらは何故起こるのか説明せよ。

発表とレポートでは、最後の設問「振動数による浅海域への侵入の可否の原因」に関して、前述した Matlab を用いた内部波の波群追跡 Ray Tracing の結果を動画や図とともに発表やレポートとしてまとめること。図は、前述した方法で画像として保存し、それらをワードファイルに貼付けてレポートを作成する事。
また、発表はパワーポイントを用い、スライドには設問の答えを論理的に説明する模式図等を入れるとともに、Matlab で作成した図を加えてそれらについても説明する事。発表は、15 分で質疑を数分とし、班の全員が分担すること。
ワードで作成したレポートの提出はここからログインして行って下さい。

7　黒潮やメキシコ湾流

日本の沿岸域には黒潮と呼ばれる特徴的な海流が存在します。黒潮は暖かい暖流で、日本の南岸をなめる様に北上し、房総半島から常磐沖で東に流去し、膨大な量の海水と熱、物質の輸送を担っています。日本沿岸域の海洋環境はしばしば、この黒潮が沿岸に波及する事で変化するため、海洋の物理、化学、生物の分野で黒潮の変動とその関わりを調べる試みが行われています。詳しくは私も参加させて頂いている、SKED という黒潮生態系変動機構の解明プロジェクトのホームページをご覧下さい。

黒潮やガルフストリーム等の様な海洋の表層の循環をなす海流はどのようなメカニズムで駆動されているのでしょうか。実はこれらの西岸境界流の駆動メカニズムが解明されたのは、そんなに昔では有りません。ここでは、表層循環について学びましょう。表層の循環を駆動している主な駆動力は海上を吹く風によって海面に与えられます。皆さんにとって身近な北太平洋の平均的な風をベクトルで示した図が以下になります。

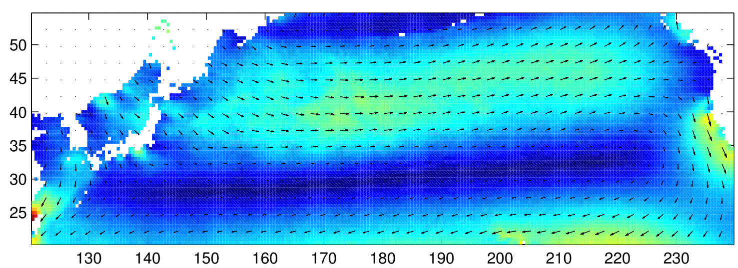


Figure 21: 色は、北太平洋の風応力の平均。ベクトルはその大きさと方向を示す。

このような風が北太平洋で吹いているとき、果たしてどんな循環が生じるのでしょうか。風によって海水が引きずられて、或は押されて出来る循環を調べるために、まずエクマン輸送について復習しましょう。

7.1　エクマン輸送

ノルウェーの科学者・探検家であるナンセンは、北極海探検中、洋上の氷が風の吹く方向に進まず、右斜め方向 20-45 度の角度の方向に流されるのをみて不思議に思い、同僚にその原因を探らせました。同僚は、彼の学生であった Ekman にこの問題に当たらせ、Ekman は以下のような有名な理論を 1902 年に導きました。

ここでは、地球の自転を考慮し、また、風応力に伴う水深方向に一様な東西、南北成分それぞれの地衡流 u_g、v_g があるとします。地衡流とは、コリオリの力と圧力傾度力が釣り合った状態で存在する流れの事です。恐らく他の授業でも勉強したと思いますが、地衡流のバランスは以下の様に書く事ができ、

$$
\begin{aligned}
x \quad : \qquad -fv_g &= -\frac{1}{\rho}\frac{\partial p}{\partial x} \\
y \quad : \qquad fu_g &= -\frac{1}{\rho}\frac{\partial p}{\partial y}
\end{aligned} \tag{166}
$$

ここで、p は圧力、ρ は海水の密度、f はコリオリパラメータです。

しかし、風によってこの地衡流が流れるためには、海水が風によってひこずられなければなりません。そのためには、海水のもつ粘性 (粘っこさ)、或は摩擦を考慮しなければならず、そうしないと、ひこずられるという効果を表現する事が出来ません。海水の粘性、或は摩擦を考慮すると、海面と海底付近に形成されている、流体の摩擦が無視できず流れが摩擦の影響を受けてその方向や強さが変化する比較的薄い層、境界層の影響を理論に含める事が出来ます。

では、この摩擦力とコリオリカ、圧力傾度力がバランスし、流れが時間的に変化しなくなったときの状態を式で表してみましょう。

$$
\begin{aligned}
x \quad : \qquad -f\left(v_E + v_g\right) &= -\frac{1}{\rho}\frac{\partial p}{\partial x} + \nu\frac{\partial^2 u}{\partial z^2} \\
y \quad : \qquad f\left(u_E + u_g\right) &= -\frac{1}{\rho}\frac{\partial p}{\partial y} + \nu\frac{\partial^2 v}{\partial z^2}
\end{aligned} \tag{167}
$$

ここで、u_E や v_E は右辺第 2 項の摩擦力と釣り合っている東西と南北流です。この式のうち地衡流に関わる項は、(**??**) の関係を用いれば消えてしまいます。従って、地衡流と摩擦の影響を受けた流れの和を u や v とし、

$$
\begin{aligned}
u &= u_E + u_g \\
v &= v_E + v_g
\end{aligned} \tag{168}
$$

の関係を用いれば、元の式は、流れの和を u や v について以下の様に書けます。

$$
\begin{aligned}
x \quad : \qquad -f\left(v - v_g\right) &= \nu\frac{\partial^2 u}{\partial z^2} \\
y \quad : \qquad f\left(u - u_g\right) &= \nu\frac{\partial^2 v}{\partial z^2}
\end{aligned} \tag{169}
$$

ここで ν は海水の動粘性係数 $[\mathrm{m}^2\mathrm{s}^{-1}]$ で海水の粘っこさの指標です。また、この運動方程式の境界条件は、海面において風応力 τ の東西、南北成分がそれぞれ、右辺の海水運動の摩擦を表す項に適用されます。即ち、$z=0$ の海面では、

$$\nu\frac{\partial u}{\partial z}=\frac{\tau_x}{\rho} \qquad (170)$$
$$\nu\frac{\partial v}{\partial z}=\frac{\tau_y}{\rho}$$

この境界条件を用いて、(170) を鉛直方向に積分し $z=-\infty$ で流れが無いとすれば、以下が得られます。

$$V=\int_{-\infty}^{0}(v-v_g)\,dz=-\frac{\nu}{f}\int_{-\infty}^{0}\frac{\partial^2 u}{\partial z^2}dz=-\frac{\tau_x}{f\rho} \qquad (171)$$

$$U=\int_{-\infty}^{0}(u-u_g)\,dz=\frac{\nu}{f}\int_{-\infty}^{0}\frac{\partial^2 v}{\partial z^2}dz=\frac{\tau_y}{f\rho} \qquad (172)$$

即ち、海面の風応力伴う流体の総水平輸送（エクマン輸送）は、風応力の方向に対して北半球（南半球）においては直角 90 度右（左）方向に発生するのです。

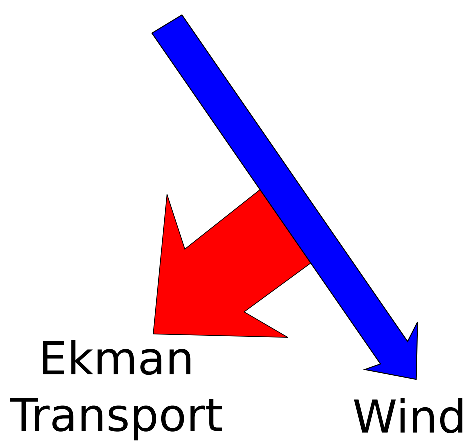


Figure 22:　北半球表層でのエクマン輸送

ここで、連続の式を思い出してください。連続の式は、

$$\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} + \frac{\partial w}{\partial z} = 0 \tag{173}$$

と書けます。これを $z = h$ から海面 $z = 0$ まで積分し、

$$\frac{\partial U}{\partial x} + \frac{\partial V}{\partial y} = w|_h \tag{174}$$

を得ます。ここで海面では $w = 0$ としました。海面の上昇や下降は厳密には 0 では有りませんが、平均すればその上昇下降は無視できるほど小さいからです。

従って、(172) を偏微分して足し合わせる事によって得られる U と V の発散

$$\frac{\partial U}{\partial x} + \frac{\partial V}{\partial y} = \frac{1}{f\rho}\left(\frac{\partial \tau_y}{\partial x} - \frac{\partial \tau_x}{\partial y}\right) \tag{175}$$

を調べれば、(174) と比べて、風応力が流体内部で湧昇流を促すか、下降流を促すかが明らかとなります。(175) の右辺の括弧内は、風応力の回転を表し、この項が正なら反時計回り、負なら時計回りに風が吹くことを表します。北半球では、$f > 0$ であるので、反時計回りに風が吹けば、(175) > 0 となり海面境界層での発散を表し、時計回りだと (175) < 0 となって海面境界層での収束を表します。(174) と組み合わせれば、反時計回りに風が吹けば、(175) > 0 となり、境界層下部で上昇流が、時計回りだと (175) < 0 となって境界層下部で下降流が発生する事になるのです。前者をエクマン発散、後者をエクマン収束と呼びます。

7.2 スベルドラップ平衡

エクマン収束や発散を説明した方程式には、地衡流と風による流れを分けて議論したため最終的に圧力傾度力が含まれていません。また、地球自転効果が緯度方向に変化する効果も考慮していません。ここでは、運動に圧力傾度力を考慮し、さらに地球の自転による効果が緯度によって変化する影響について調べましょう。(170) に圧力傾度力を含めた運動方程式は、以下の様に書けます。

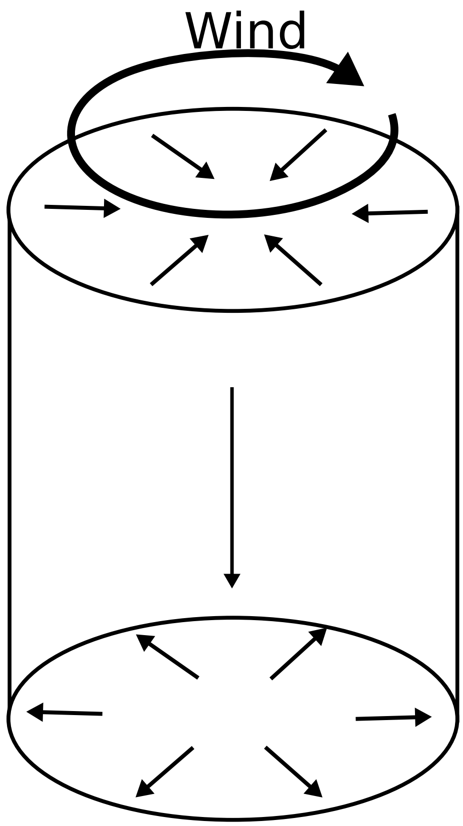


Figure 23: 北半球でのエクマンパンピング

$$
\begin{aligned}
x \quad : \qquad -fv &= -\frac{1}{\rho}\frac{\partial p}{\partial x} + \nu\frac{\partial^2 u}{\partial z^2} \\
y \quad : \qquad fu &= -\frac{1}{\rho}\frac{\partial p}{\partial y} + \nu\frac{\partial^2 v}{\partial z^2}
\end{aligned}
\tag{176}
$$

これらを、エクマン層深度よりもかなり深い水深 $-H$ から海面まで積分し、右辺第 2 項には海面の境界条件 (171) を適用すると、

$$
\begin{aligned}
-fM_y &= -\int_{-H}^{0}\frac{\partial p}{\partial x}dz + \tau_x \\
fM_x &= -\int_{-H}^{0}\frac{\partial p}{\partial y}dz + \tau_y
\end{aligned}
\tag{177}
$$

と書けます。ここで、$-H$ では流速の鉛直勾配がないことを仮定しました。従って $-H$ では摩擦力が無視できるとした事になります。これは風による流れが殆ど期待できない底部の流体にとって妥当な仮定と言えます。また、M_x と M_y は夫々、$M_y = \int_{-H}^{0} \rho v dz$ 、$M_x = \int_{-H}^{0} \rho u dz$ であり、水深 $-H$ までの流量の東西、南北成分です。式 (178) を夫々 x と y で偏微分して差し引くと、

$$M_y \beta = \frac{\partial \tau_y}{\partial x} - \frac{\partial \tau_x}{\partial y} \tag{178}$$

を得ます。ここで、 $\partial M_x/\partial x + \partial M_y/\partial y = 0$ を用いました。すなわち、海面からかなり深い水深 $-H$ までの海水の総量は、増えたり減ったりしないことを仮定しました。これは海面の上昇や下降の速さが他の変化を表す項に比べて小さいためです。ここで、$\beta = \partial f/\partial y$ で、コリオリパラメータが緯度方向に変化する度合いを表します。この式 (178) は、スベルドラップの輸送を表す式で、すなわち、海面を吹く風が回転している場合、南北方向に海水輸送が発生することを表します。例えば、北半球で風が時計回りに吹く場合、南方向の海水輸送が発生することを表すのです。

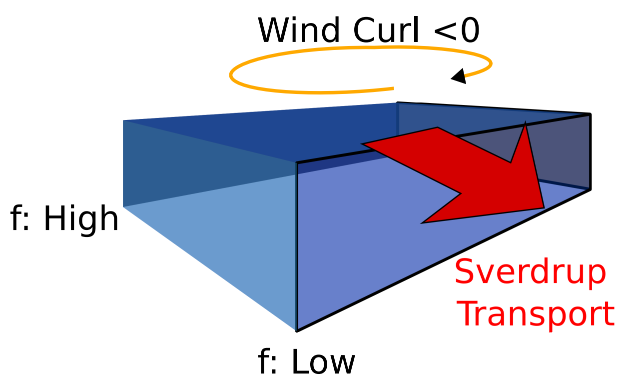


Figure 24:　地球でのスベルドラップ輸送

7.3　西岸強化

さて実際の北半球の亜熱帯域では、図 () から判る様に、平均して風が海盆上を時計回りに吹いています。従って、ここでは、南向きの海水輸送が積分した場合生じることになります。また、北半球の亜寒帯域では逆に反時計回りの風が海上を吹いており、ここでは北向きのスベルドラップ輸送が発生しう

る事になるのですが、これらの議論には、東西の陸境界が含まれていません。これら不足項を考慮し、理論的に西岸境界流のメカニズムをはじめて明らかにしたのは、Stommel です。

北半球亜熱帯域の全てで南向き、亜寒帯域で北向きの輸送があるなら、それを補う様な海水の輸送が無ければ海水が無くなってしまいます。これを補う様に鉛直的な流れが発生すればよいのですが、式の導出課程でエクマン層よりもかなり深い水深 $-H$ までを積分したことを考えれば、そんな深いところで大きな鉛直流は期待できません。

したがって、亜熱帯域ではどこかで北向きの輸送が、亜寒帯域ではどこかで南向きの輸送が発生していなければなりません。そしてスベルドラップ輸送の式 (178) がそれを許さない事から、そのような反対向きの輸送は、これまで考慮してこなかった東西の陸境界付近で発生している事が予想されます。

それでは、この問題を亜熱帯域に絞って考えていきましょう。「北向きの輸送がどこかに無ければ、亜熱帯域の海水はなくなってしまう」のでした。この問題をポテンシャル渦度の保存で考えてみることにします。

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{f+\zeta}{D}\right)=0 \tag{179}$$

ここで、括弧内はポテンシャル渦度であり、ζ は相対渦度 $\zeta=\partial v/\partial x-\partial u/\partial y$、$D$ は水深です。東西の陸境界でこの北向きの輸送が発生しているとしましょう。東か西かは未だ判りません。

もし、北向きの輸送が海盆の東側 (太平洋ではカリフォルニア側) で発生している場合、北向きの輸送に伴って、輸送される流体粒子は f の増加を経験します。D を一定とすると、ζ は (179) を満たすために減少しなければなりません。しかしながら、東岸で北向きの流れが強くなると必然的に ζ は増加することになります。なぜなら、カリフォルニア沿岸で強い北向きの流れが有るなら、陸境界付近で $\partial v/\partial x>0$ となるからです。一方、西岸で強い北向きの流れがある場合、同じく f の増加にバランスするために ζ は減少しなければならなりませんが、西岸の北向きの強い流れは、ζ を減少させる負の渦度が生じ易いため、この要件を満たし得ることになります。このため、西岸で強い北流が発生すると説明することができるのです。

上記の西岸強化の原因に関しては、惑星ロスビー波と呼ばれる波が、地球上では西方へ伝播し、特にスケールの大きなロスビー波はエネルギーを西方へ伝達することで、エネルギーが西岸へ捕捉されるためであるという説明も可能です。

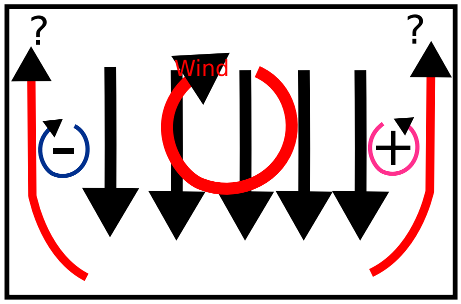


Figure 25:　北への輸送は東西のどちら側で起こるか？

ポテンシャル渦度の保存

西岸強化流のメカニズムの説明に使用される浅海のポテンシャル渦度の保存を導出する。そのために必要な浅海の粘性を無視した水平方向に関する運動方程式、および連続の式は、

$$\frac{\partial u}{\partial t} + u\frac{\partial u}{\partial x} + v\frac{\partial u}{\partial y} - fv = -\frac{1}{\rho}\frac{\partial p}{\partial x} \tag{180}$$

$$\frac{\partial v}{\partial t} + u\frac{\partial v}{\partial x} + v\frac{\partial v}{\partial y} + fu = -\frac{1}{\rho}\frac{\partial p}{\partial y} \tag{181}$$

$$\frac{\partial h}{\partial t} + \frac{\partial uh}{\partial x} + \frac{\partial vh}{\partial y} = 0 \tag{182}$$

となる。ここで、u は東西流、 v 南北流、 p 圧力、 h 水深、 f コリオリパラメータである。最後の式は、ある地点の水嵩が、鉛直一様な水平流を深さで積分した輸送量 uh や vh の発散、収束によって変化する事を表す。 (182) から、単に以下が導ける。

$$\begin{aligned} \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} &= -\frac{1}{h}\left(\frac{\partial h}{\partial t} + u\frac{\partial h}{\partial x} + v\frac{\partial h}{\partial y}\right) \\ &= -\frac{1}{h}\frac{dh}{dt} \end{aligned} \tag{183}$$

次に (180) を y で、(181) を x でそれぞれ微分して差し引きすると、

$$\begin{aligned} &\frac{\partial}{\partial t}\left(\frac{\partial v}{\partial x} - \frac{\partial u}{\partial y}\right) + u\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial v}{\partial x} - \frac{\partial u}{\partial y}\right) + v\frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial v}{\partial x} - \frac{\partial u}{\partial y}\right) \\ &\quad + \left(\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y}\right)\left(\frac{\partial v}{\partial x} - \frac{\partial u}{\partial y}\right) \\ &\quad + u\frac{\partial f}{\partial x} + v\frac{\partial f}{\partial y} + f\left(\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y}\right) = 0 \end{aligned} \tag{184}$$

ポテンシャル渦度の保存 つづき

ここで $(\partial v/\partial x - \partial u/\partial y) = \zeta$ とおき、(184) を用いれば、

$$\frac{\partial \zeta}{\partial t} + u\frac{\partial \zeta}{\partial x} + v\frac{\partial \zeta}{\partial y} + u\frac{\partial f}{\partial x} + v\frac{\partial f}{\partial y} - f\left(\frac{1}{h}\frac{dh}{dt}\right) - \zeta\left(\frac{1}{h}\frac{dh}{dt}\right) = 0 \tag{185}$$

すなわち、

$$\frac{d}{dt}(f+\zeta) - \frac{f+\zeta}{h}\frac{dh}{dt} = 0 \tag{186}$$

と言える。ここで、地球の自転の効果 f は、任意地点で時間変化しないため、$df/dt = -u\partial f/\partial x - v\partial f/\partial y$ と時間変化項を省略して、ラグランジュ微分の形で書けることを利用した。
今、ポテンシャル渦度の保存式 (188) の左辺括弧内を時間微分して展開すると、

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{f+\zeta}{h}\right) = \frac{1}{h^3}\left[\left(\frac{f+\zeta}{h}\right)\frac{dh}{dt} - \frac{d}{dt}(f+\zeta)\right] \tag{187}$$

となり、[ ] 内は、(186) から 0 であるので、

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{f+\zeta}{h}\right) = 0 \tag{188}$$

が成り立つ。従って、流体粒子を追いかけて、括弧内のポテンシャル渦度は変化しない。つまり保存する。

8　Matlab で衛星海面高度計データを解析をしよう

ここでは、複数の人工衛星を用いて計測されている絶対海面高度データをから、海面の地衡流を計算し、黒潮フロントが時間的にどのような変化を取っているか、また、その離接岸が沿岸の環境にどのような影響を及ぼしているか、解析してみましょう。

8.1　海面高度データ

このような解析を行うために必要な海面高度データは、AVISO (Archiving, Validation and Interpretation of Satellites Oceanographic data)

http://www.aviso.altimetry.fr/en/home.html からダウンロードする事が可能ですが、データの取得にはユーザー登録が必要となり、5 日間程度登録に時間を要しますので、この授業では、既にダウンロード済みのデータを用いて解析を行ってもらう事にします。この海面高度データは、授業等で使うのには、何ら問題有りませんが、商用となるとライセンス契約が必要となります。

海面高度データは、人工衛星から地球に向けて発せられる電磁波によって測定されます。データは人工衛星の軌道下でしか得る事が出来ないため、AVISO では、複数の人工衛星で取得した海面高度データを客観解析して空間的に補間して、0.3 度或は 0.25 度の格子データとして提供しています。

データの保存形式は、NetCDF(Network Common Data Form) と呼ばれる形式で、地球科学分野の観測、実験、予測データを保存し、公開する際に頻繁に用いられる形式です。Matlab (2009) 以降には、NetCDF ファイルを読み込んだり書き込んだりする機能が備え付けてありますので、Matlab があれば NetCDF ファイルを取り扱う事が出来ます。しかし、この演習では簡単のためにあらかじめ Matlab File に変換したものを用いましょう。

変換したファイルは 2011-2013 年について以下の URL から取得できます。

2011: http://www2.kaiyodai.ac.jp/ tnagai/lecture/ssh2011.mat
2012: http://www2.kaiyodai.ac.jp/ tnagai/lecture/ssh2012.mat
2013: http://www2.kaiyodai.ac.jp/ tnagai/lecture/ssh2013.mat

これらを全てダウンロードして作業ディレクトリに保存して下さい。

例えば、2012 年の海面高度データ、ssh2012.mat を Matlab ワークスペースに読み込みしたいなら、以下の様にコマンドウィンドウで load を用いて、whos で読み込まれた変数を確認します。すると、

```
>> load ssh2012
>> whos
  Name          Size                    Bytes   Class      Attributes

```

```
  day         365x1              2920  double
  lat         101x161          130088  double
  lon         101x161          130088  double
  month       365x1              2920  double
  ssh         365x101x161    47482120  double
  time        365x1              2920  double
  year        365x1              2920  double
```

などのように、ssh に海面高度データが、lon、lat に経度と緯度が行列として格納されている事が判ります。ここで、ssh の単位は m、lon や lat は度 (子午線に沿った) となっています。行列の次元を見ると、ssh は、365x101x161 と、最初の次元が、日、次が経度、最後が緯度と 3 次元の行列と成っているのに対し、lon や lat は、101x161 のように最初の次元が経度、最後が緯度と 2 次元の行列と成っていることが判ります。一方、time や year、month、day は 365x1 なので、1 列しかなく、それが日に対応しています。ここで time は、西暦 0 年 1 月 1 日を 0 日目として数えた日数です。Matlab では、この西暦 0 年 1 月 1 日から日数を数える為に、datenum という関数が既に装備されていますので、datanum をコマンドウィンドウで直接使うことが可能です。例えば、

```
>> dn=datenum(2012,7,4)

dn =

      735054
```

とすれば、2012 年の 7 月 4 日が西暦 0 年 1 月 1 日から数えて、735054 日目であることを教えてくれます。次に、この 735054 日を逆に年月日の行列に戻すには、datevec を用います。同様に年月日の文字列にするには、datestr を用います。

```
>> datevec(dn)

ans =

        2012           7           4           0           0           0
>> datestr(dn)

ans =

04-Jul-2012
```

それでは、この time を用いて、2012 年の 7 月 4 日の海面高度を図示してみましょう。そのためにまず time の何番目の値が 2012 年の 7 月 4 日なのかを調べます。それを idx として出力する為には、find という関数を用います。find には括弧内に条件文を書くことができ、それを満たすインデックスを帰す機能があります。その idx を用いて、2012 年の 7 月 4 日の ssh を抽出します。

```
>> idx=find(time==datenum(2012,7,4));
>> ssh20120704=ssh(idx,:,:);
>> whos ssh20120704
  Name              Size                 Bytes  Class     Attributes

  ssh20120704       1x101x161           130088  double
```

これで、2012 年の 7 月 4 日の ssh を抽出することが出来ましたが、whos コマンドの結果から抽出したデータの次元が、1x101x161 であることが判ります。この最初の次元は要素が 1 しか無いので、lon や lat と同じ次元にする為には、最初の次元を削除しておく必要があります。その場合には、squeeze というコマンドを使います。

```
>> ssh20120704=squeeze(ssh20120704);
>> whos ssh20120704 lon lat
  Name              Size            Bytes  Class     Attributes

  lat             101x161          130088  double
  lon             101x161          130088  double
  ssh20120704     101x161          130088  double
```

これで、ssh20120704 と lon、lat の次元が揃いました。同じ次元の座標 x、 y とその書く座標での値を使って、Matlab は値の分布を色で表すコマンドを持ちます。その一つに pcolor というコマンドがあります。

```
>> pcolor(lon,lat,ssh20120704)
>> shading flat
>> caxis([-0.25 1.75])
>> colorbar
>> xlabel('longitude')
>> ylabel('latitude')
>> saveas(gcf,'sshfig','png')
```

これで以下の様な図が表示されたと思います。ここで、xlabel は括弧内のシングルコーテーションで囲まれた文字を横軸のラベルにするコマンド、ylabel も同様に縦軸にラベルをつけるコマンドです。saveas は図を sshfig という名前で png ファイル形式という画像ファイルに保存するコマンドです。

8.1.1 海面高度の動画を作成するプログラムを書こう

Matlab には動画を作成する機能が備わっています。その機能を使って、海面高度の動画を作成しましょう。作成するには以下の様なプログラムを書きます。例えば 2011 年の海面高度の動画を作成するには、

```
load ssh2011

aviobj = avifile('SSH2011.avi', 'compression', 'Cinepak');
```

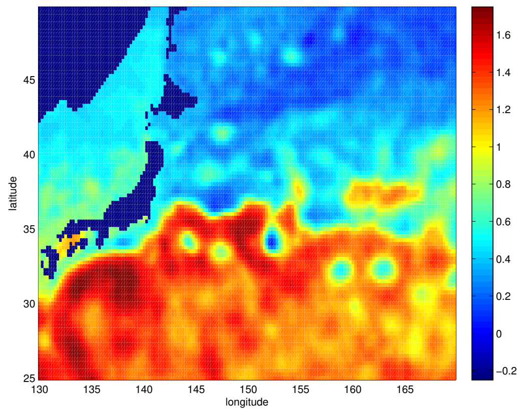


Figure 26: 2012 年 7 月 4 日の海面高度 (m)

```

for i=1:1:size(ssh,1)

    \% 日ごとの海面高度を取り出す
    sshi=squeeze(ssh(i,:,:));
    pcolor(lon,lat,sshi)
    shading flat
    \% 色の範囲を値で指定する
    caxis([-0.25 1.75])
    \% カラーバーを付ける
    colorbar

    \% 日付やラベルをつける
    title(datestr(time(i)))
    xlabel('logitude')
    xlabel('latitude')
    \% 現在の図を動画のフレーム用に取り出す
    F = getframe(gcf);
    \% 取り出したフレームを動画ファイルに書き込む
    aviobj = addframe(aviobj,F);

    clf

end
\% 動画ファイルを閉じる
aviobj = close(aviobj);
```

8.2 地衡流を計算する

絶対海面高度が得られれば、そこから海面の地衡流を計算する事が可能です。ここで計算できる地衡流は、海面における地衡流バランスした流れで、海洋情報解析学などで行う、CTD で測定した複数の水温と塩分の鉛直分布を用いて行う「地衡流計算」あるいは「力学計算」とは異なります。「地衡流計算」では、深い水深 (例えば 1000 m) で流れが無い事を仮定して、そこから流速の鉛直勾配が密度の水平勾配に比例するという温度風平衡の式を鉛直的に積分して鉛直的な流速を求めます。これは、海洋を船舶等で観測するだけでは、等圧面の傾きを知る事ができないためです。東圧面の傾きを知るために、CTD で測定した複数の水温と塩分の鉛直分布データが複数点で必要となります。一方、海面高度データで得られる海面の傾きは、海洋の表面の等圧力面の傾きですので、海面高度データを面で整備する事で、原理的に海面の圧力傾度力を知る事が出来る訳です。この海面の水平面からのずれを η とするとき、地衡流バランスの式は以下の様に書けます。

$$
\begin{aligned}
v &= \frac{g}{f}\frac{\partial \eta}{\partial x} \\
u &= -\frac{g}{f}\frac{\partial \eta}{\partial y}
\end{aligned}
\tag{189}
$$

ここで、x、y は東西、南北方向の距離、u、v は東西、南北方向の地衡流、g は重力加速度、f はコリオリパラメータ $f = 2\Omega \sin\phi$ (Ω：地球の自転角速度、ϕ：緯度) です。

8.2.1 緯度と経度を距離に変換する

しかしながらデータを読み込んでも緯度と経度は子午線に沿った「度」の単位で格納されています。地衡流計算を行う際に、海面の傾きを求めるとき、距離で微分する必要があるので、このままでは、計算を行う事が出来ません。此処では、「度」を距離に治す関数を作成しましょう。

地球の緯度は南極点で-90 度、北極点で+90 度です。従って、例えば、日本列島付近の東経 135 度の子午線に沿った北極点から南極点までの距離は、グリニッチ天文台がある東経 0 度のそれとほとんど同じです。一方同緯度を東西に結んだ、卯酉線は緯度によって地球を一周する距離が異なります。卯酉線は赤道で最も長く、曲域で短くなります。従って、経度変化は緯度によってその実際の距離が異なる事になるのです。具体的には、以下の様なプログラムで地球上の 2 点の緯度経度の間の距離を計算します。

```
function dist=compdist(lon1,lat1,lon2,lat2)
\%
\% 地球上の２転換の距離を求める。
\%
\%  dist=compdist(lon1,lat1,lon2,lat2)
\%
\% 始点の経度、緯度 : lon1, lat1
\% 終点の経度、緯度 : lon2, lat2
\%
\% 入力は、行列でも可
\% 出力：距離 dist [m]
\%

\% 緯度や経度の角度をラジアンに直す係数
fac=pi/180;

\% 緯度差、経度差をラジアンで算出
dely=fac.*abs(lat2-lat1);
delx=fac.*abs(lon2-lon1);

\% 平均の緯度を算出
latm=(lat1+lat2)./2;

\% 地球の長半径
ra=6378137.000;
\% 地球の短半径
rb=6356752.314245;

\% 地球の離心率の２乗
elp2=(ra^2-rb^2)/ra^2;

\% 赤道での卯酉線の単位ラジアン角に対する長さを算出
P0=sqrt(1-elp2.*sin(latm.*fac).^2);
Pv=ra./P0;

\% 子午線の単位ラジアン角に対する長さを算出
Md=ra*(1-elp2)./P0.^3;

\% 子午線沿いの長さの２乗と卯酉線上の長さの２乗の和の平方根が距離
\% 卯酉線上の単位ラジアン角に対する長さは、緯度によって異なり、
\% 極域で小さく赤道で大きい。この変化はコサインで表される。
dist=sqrt((dely.*Md).^2+(delx.*Pv.*cos(latm.*fac)).^2);
```

8.2.2 海面高度データから海面地衡流を求める Matlab 関数をつくろう

では、実際にある年の海面高度データを読み込んで、そのうち１日の地衡流をもとめる Matlab 関数を作ってみましょう。ここでは、あらかじめ 2011-2013 の海面高度データが作業ディレクトリにダウンロードされていることを想定しています。また、このプログラムで用いる、mygradient2D.m という２次元の勾配を計算するプログラムを、ここ: http://www2.kaiyodai.ac.jp/ tnagai/lecture/mygradient2D.m からダウンロードして作業ディレクトリに保存

して下さい。

```
function [u, v, lon, lat]=geovelssh(year,monthi,dayi)
\% 入力
\% 地衡流を計算する年  : yeari
\% 地衡流を計算する月  : mothi
\% 地衡流を計算する日  : dayi
\% 出力
\% 東西流  : u
\% 南北流  : v
\% 経度  : lon
\% 緯度  : lat


\% 重力加速度を定義する
g=9.81;
\% 地球の自転角速度
Omega=7.2921159e-5;

\% 対象とするデータを読み込む
if yeari==2011
    load ssh2011
elseif yeari==2012
    load ssh2012
elseif yeari==2013
    load ssh2013
end
idx=find(datenum(yeari,monthi,dayi)==time)
ssh=ssh(idx,:,:);
ssh=squeeze(ssh);
\% コリオリパラメータを算出
f=2.*Omega.*sin(lat.*pi./180);

\% 読み込んだ緯度と経度を距離に変換する
\% まず、東西方向に隣り合う経度の格子点間の距離をメートル単位で算出
dx=compdist(lon(:,2:end),lat(:,2:end),lon(:,1:end-1),lat(:,1:end-1));
dy=compdist(lon(2:end,:),lat(2:end,:),lon(1:end-1,:),lat(1:end-1,:));
\% 差の累積和は距離
x=cumsum(dx,2);
y=cumsum(dy,1);
\% もとの緯度経度の次元から一つ小さくなってしまうため、0を付け足す
x=cat(2,zeros(size(lon,1),1), x);
y=cat(1,zeros(1,size(lon,2)),y);


\% 海面高度の水平勾配を求める
[etax,etay]=mygradient2D(ssh,x,y);

\% 地衡流を計算する
v=g.*etax./f;
u=g.*-etay./f;
```

ここで、lon(:,2:end) などのようにインデックスに end を用いることが出来、end はその行列の次元の最後の要素を意味します。例えば、A という行列が 4x5 (4 行 5 列) の行列である時、A(1,end) は A の 1 行 5 列目の値を指し

ます。

また、cumsum は累積和を計算する関数で、cumsum(dx,2) は dx を 2 番目の次元：行に関して累積和をとることを意味します。同様に、cumsum(dy,1) は dy を 1 番目の次元：列に沿った累積和です。しかし、ここで注意が必要です。dx や dy はそれぞれ、緯度、経度の位置情報を東西方向、南北方向に差をとってメールに直したものです。差であるので、元の行列の次元より 1 つ小さくなってしまいます。これを累積和するとき、最も小さい x や y は 0 ではなく、最初の格子間距離になります。したがって、減った次元に関して 0 を挿入して元の lon や lat と同じ次元を持つ様にしましょう。そのために、zeros というコマンドを用います。zeros は、例えば zeros(3,2) とすると、3 行 2 列で値が全て 0 である行列を生成します。また、size(lon,1) は行列 lon の 1 番目の次元の要素数を表します。したがって、zeros(size(lon,1),1) は、lon の 1 番目の次元の要素数の行と 1 列で、値が全て 0 の行列です。cat は、2 つの行列を繋ぐコマンドです。例えば、cat(1,A,B) とすると、行列 A の後に B を 1 番目の次元：行に沿って繋げという命令に成ります。従って、x=cat(2,zeros(size(lon,1),1), x) は、1 列の零からなる行列を x の 2 番目の次元：列、即ち最初の列として x の前におくことを意味します。同様に、y=cat(1,zeros(1,size(lon,2)),y) は、y の最初の行の前に零から成る 1 行の行列を置けという命令です。

[etax,etay]=mygradient2D(ssh,x,y) は、ssh の東西 x、南北 y 方向の勾配を etax、etay として算出するプログラムです。前述した

このリンク: http://www2.kaiyodai.ac.jp/ tnagai/lecture/mygradient2D.m からダウンロードして下さい。

8.2.3 海面高度データから黒潮流軸位置を抽出する Matlab 関数を作成しよう

黒潮流軸の変動を調べるために、黒潮流軸を先行研究に習って定義しましょう。Qiu (2005) らの研究では、黒潮の変動を特徴づけるために、流軸を特定の絶対海面高度で定義しています。ここでは、このような定義を採用して、任意の海面高度データについてその流軸の位置を緯度と経度で出力する Matlab 関数を作成しましょう。ここでは、ssh=1 m を黒潮流軸としましょう。

```
function [lonk, latk]=kuroshioaxis(yeari, monthi, dayi)
\% 入力
\% 地衡流を計算する年   : yeari
\% 地衡流を計算する月   : mothi
\% 地衡流を計算する日   : dayi
\% 出力
\% 流軸の経度   : lonk
\% 流軸の緯度   : latk

\% データを読み込む
```

```
if yeari==2011
    load ssh2011
elseif yeari==2012
    load ssh2012
elseif yeari==2013
    load ssh2013
end
idx=find(datenum(yeari,monthi,dayi)==time)
ssh=ssh(idx,:,:);
ssh=squeeze(ssh);

\% 読み込んだ海面高度を用いて、流軸の等値線を計算する
c=contourc(lon(1,:),lat(:,1),ssh,[1 1]);

\% 計算した最も長い等値線に沿った緯度経度を抽出する
[m,n]=size(c);
flag=1;
endnum=0;
numdatap=0;
while flag==1
    numdata=c(2,endnum+1);
    if numdata > numdatap;
        lonk=c(1, endnum+2: endnum+1+numdata);
        latk=c(2, endnum+2: endnum+1+numdata);
        numdatap=numdata;
    end
    endnum=endnum+1+numdata;
    if endnum+1>n
        flag=-1;
     end
end
```

c=contourc(lon(1,:),lat(:,1),ssh,[1 1]) とすることで、ssh=1 である等値線の位置を抽出します。その後のプログラムは、ssh=1 である等値線のうち最も長いものを黒潮流軸とする為のプログラムです。詳細は省略します。出力された黒潮流軸の位置を先程計算した流速の絶対値の上に重ねて図を書くには、以下の様にすれば良いでしょう。

```
>> [u, v,lon,lat]=geovelssh(2012,7,4);
>> [lonk, latk]=kuroshioaxis(2012, 7, 4);
>> pcolor(lon,lat,sqrt(u.^2+v.^2))
>> shading flat
>> caxis([0 1.75])
>> colorbar
>> hold on
>> plot(lonk,latk,'k')
>> xlabel('longitude')
>> ylabel('latitude')
>> saveas(gcf,'sshfig2','png')
```

これで以下の様な図が表示されたと思います。

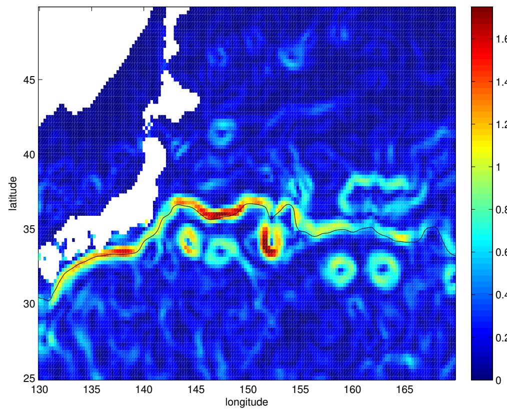


Figure 27: 2012 年 7 月 4 日の海面地衡流速 (ms^{-1}) と定義された黒潮流軸

8.2.4 複数の海面高度データを解析する

ここまでで、ある特定の日の海面高度データを抽出して、地衡流速を求めたり、黒潮流軸位置を抽出したりする関数を準備する事が出来ました。演習では、これらの関数を異なる複数のデータに用いて、黒潮が時間的にどのように変化したのか、解析を班で手分けしてやってほしいと考えています。以下の Matlab のプログラムは、ssh2013.mat に格納された海面高度データ全てについて、その流軸位置を蛇行の型のデータと比較し、蛇行型とともに構造体変数 data に格納するものです。黒潮の蛇行は、A, B, C, D, N 型に分類され議論される事が多く、その蛇行の様子を以下の図 (28) に示します。

ここで KuroshioABCDN.mat は、黒潮の型の緯度経度のデータです。このデータはここ: http://www2.kaiyodai.ac.jp/ tnagai/lecture/KuroshioABCDN.mat からダウンロードできます。作業ディレクトリに保存してください。

```
load KuroshioABCDN
\% 年の海面高度データから時間関連の変数を読み込む 2012
load('ssh2012.mat','year','month','day','time')
figure

\% そのファイル内に格納されている、海面高度データの個数は
numrec=size(year,1);

\% 保存されているデータ数回繰り返す
for i=1:1:numrec
```

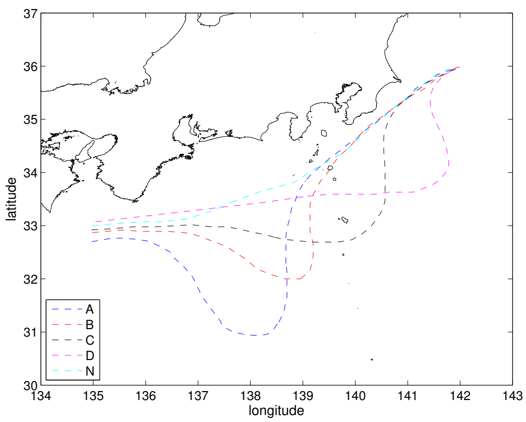


Figure 28: 黒潮の蛇行の型

```
    \% 黒潮流軸を推定
    [lonk, latk]=kuroshioaxis(year(i),month(i),day(i));
    \% 流軸位置データを構造体として格納
    data(i).lonk=lonk;
    data(i).latk=latk;
    daysk(i)=time(i);
    \% 流軸データを東経百四十二度以西、百三十五度以東で切り取る
    latk=latk(135<= lonk & lonk<=142);
    lonk=lonk(135<= lonk & lonk<=142);

    plot(lonA,latA,'b--')
    hold on;
    plot(lonB,latB,'r--')
    plot(lonC,latC,'k--')
    plot(lonD,latD,'m--')
    plot(lonN,latN,'c--')
    plot(lonk, latk,'r','linewidth',3)
    axis([134 143 30 37])

    \% 各モデル蛇行型と流軸データからの最近傍点との距離の平均を計算。
    \% その値が最も小さいものがその海面高度データから得た流軸の
    \% 蛇行型とする。
    disp(datestr(time(i)))
    for j=1:1:size(lonk,2)
        \% 蛇行型Aとの最短距離
        lonks=ones(size(lonA)).*lonk(j);
        latks=ones(size(latA)).*latk(j);
        dsA=compdist(lonks,latks,lonA,latA);
        dsAs(j)=min(dsA);
        \% 蛇行型Bとの最短距離
```

```
            lonks=ones(size(lonB)).*lonk(j);
            latks=ones(size(latB)).*latk(j);
            dsB=compdist(lonks,latks,lonB,latB);
            dsBs(j)=min(dsB);
            \% 蛇行型Cとの最短距離
            lonks=ones(size(lonC)).*lonk(j);
            latks=ones(size(latC)).*latk(j);
            dsC=compdist(lonks,latks,lonC,latC);
            dsCs(j)=min(dsC);
            \% 蛇行型Dとの最短距離
            lonks=ones(size(lonD)).*lonk(j);
            latks=ones(size(latD)).*latk(j);
            dsD=compdist(lonks,latks,lonD,latD);
            dsDs(j)=min(dsD);
            \% 蛇行型Nとの最短距離
            lonks=ones(size(lonN)).*lonk(j);
            latks=ones(size(latN)).*latk(j);
            dsN=compdist(lonks,latks,lonN,latN);
            dsNs(j)=min(dsN);

    end
    ds(1)=mean(abs(dsAs));
    ds(2)=mean(abs(dsBs));
    ds(3)=mean(abs(dsCs));
    ds(4)=mean(abs(dsDs));
    ds(5)=mean(abs(dsNs));
    \% 最も小さい距離の平均のインデックスを探す
    idx=find(ds==min(ds));
    idxs(i)=idx;
    if idx==1
        data(i).meandtyp='A';
        disp('    A')
    elseif idx==2
        data(i).meandtyp='B';
        disp('    B')
    elseif idx==3
        data(i).meandtyp='C';
        disp('    C')
    elseif idx==4
        data(i).meandtyp='D';
        disp('    D')
    elseif idx==5
        data(i).meandtyp='N';
        disp('    N')
    end

    \% 図示した流路を一瞬ポーズする
    pause(0.1)
    \% 図を消去する
    clf

end

\% 結果をファイルに保存する
save Kuroshiodata2012 data idxs time
```

このプログラムを使って得た Kuroshiodata.mat 中に保存された idxs という変数には、日々の流路の蛇行型が番号で格納されています。番号は、1-5 までで、1:A, 2:B, 3:C, 4:D, 5:N 型を表します。この蛇行型変化を時間の関数として図示すれば、

```
>> load Kuroshiodata2012
>> plot(time−time(1),idxs,'x')
>> xlabel('day')
>> ylabel('Meander Type')
>> saveas(gcf,'meander1','png')
```

これで以下の様な図が表示されたと思います。

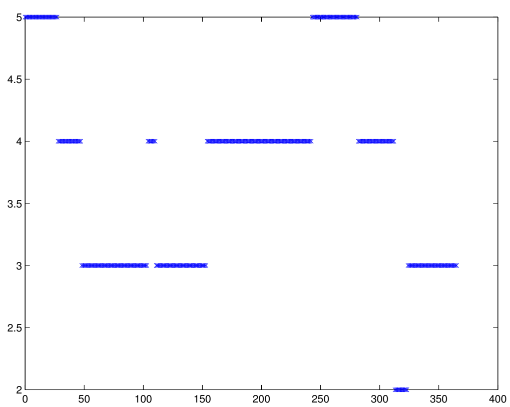


Figure 29: 2012 年の黒潮流軸の蛇行型の推定結果

黒潮ガルフストリーム担当班の課題

黒潮ガルフストリームに関してレポートと課題、発表を担当する事になった班は、以下の設問に、発表とレポートで必ず答えを示すこと。また、答えだけでなく何故その答えに至ったかを模式図や数式等を必要なら用いること。

1. 海面高度データを動画にしたものには渦が多数確認できるが一貫した運動をしている。渦はどの様な共通の運動をしているか。またそれは何故か？

2. 何故海盆の西側で流れが強化されるのか説明せよ。

3. もし地球の自転方向が逆だったら、海盆のどちら側で流れは強化されるか、説明せよ。この時日が昇る方を東側とする。

4. 黒潮は頻繁に大きな蛇行を伴う。2011-2013 の黒潮の流路は、どのように変化したか。図や動画を用いて説明せよ。

発表とレポートでは、最後の設問「黒潮の蛇行」に関して、前述した Matlab を用いた海面高度データの解析結果を動画や図とともに発表やレポートとしてまとめること。図は、前述した方法で画像として保存し、それらをワードファイルに貼付けてレポートを作成する事。
また、発表はパワーポイントを用い、スライドには設問の答えを論理的に説明する模式図等を入れるとともに、Matlab で作成した図を加えてそれらについても説明する事。発表は、15 分で質疑を数分とし、班の全員が分担すること。
ワードで作成したレポートの提出はここからログインして行って下さい。