微分積分　講義ノート I　(担当: 関口 良行)

実数

実数は中学生のときから扱っているが, その性質を改めてまとめておこう.

(1). 実数全体の集合 ($\mathbb{R}$ と書く) は数直線として表される

(2). 0 の除算を除いては, 四則演算ができる.

(3). 順序 $\leq$ がある. (例 $1 \leq \sqrt{2}$)

(4). 実数 a に対して, 絶対値 $|a|$ が定義される. これは 0 と a の間の長さである.

以下は実数に関する基本的な用語である.
$\mathbb{R}$ の空でない部分集合 A が**上に有界である**とは, A に属する数がすべて一つの数 M 以下であることである. A が**下に有界である**とは, A に属する数がすべて一つの数 m 以上であることである. このような M を A の**上界**といい, m を A の**下界**という. A の上界全体の最小数 α を A の**上限**という. A の下界全体の最大数 β を A の**下限**という.
実数には次の大事な性質がある (公理とも言える).

定理 1 (上限・下限の存在定理)**.** *A を $\mathbb{R}$ の空でない部分集合とする. このとき A が上に有界であれば, A の上限が存在する. また, A が下に有界であれば, A の下限が存在する.*

以上の性質から実数に関する定理はすべて導かれる.

数列

例 1.

$$a_n = \frac{1}{n}, \quad n = 1, 2, \ldots$$

で定義される数列は

$$1,\ \frac{1}{2},\ \frac{1}{3},\ \frac{1}{4},\ \frac{1}{5} \cdots$$

である.

n が大きくなるに従って, この数列の値はどんどん小さくなっていって, 限りなく 0 に近づくことがわかるだろう. このような場合, a_n は 0 に収束するという.

改めて, きちんとした定義を紹介しよう.

無限数列 $a_1, a_2, \ldots, a_n, \ldots$ において, n が限りなく大きくなるとき, a_n が一定の数 α に近づくならば, 数列 $\{a_n\}$ は α に**収束**するといい,

$$\lim_{n\to\infty} a_n = \alpha \text{ または } a_n \to \alpha\ (n \to \infty)$$

と書く. このとき, α を $\{a_n\}$ の**極限**と呼ぶ. これは $|a_n - \alpha|$ が 0 に収束するとも言い換えられる.

より厳密に書くと, $\{a_n\}$ が α に収束するとは, 任意の正数 $\varepsilon > 0$ が与えられると, それに対応して一つの番号 n_0 が

$$n > n_0 \text{ ならば } |a_n - \alpha| < \varepsilon$$

となるように決められることである.

もし, どんなに大きな数 R に対しても, 一つの番号 n_0 が

$$n > n_0 \text{ ならば } a_n > R$$

となるように決められる場合,

$$\lim_{n\to\infty} a_n = \infty \text{ または } a_n \to \infty\ (n \to \infty)$$

と書く.

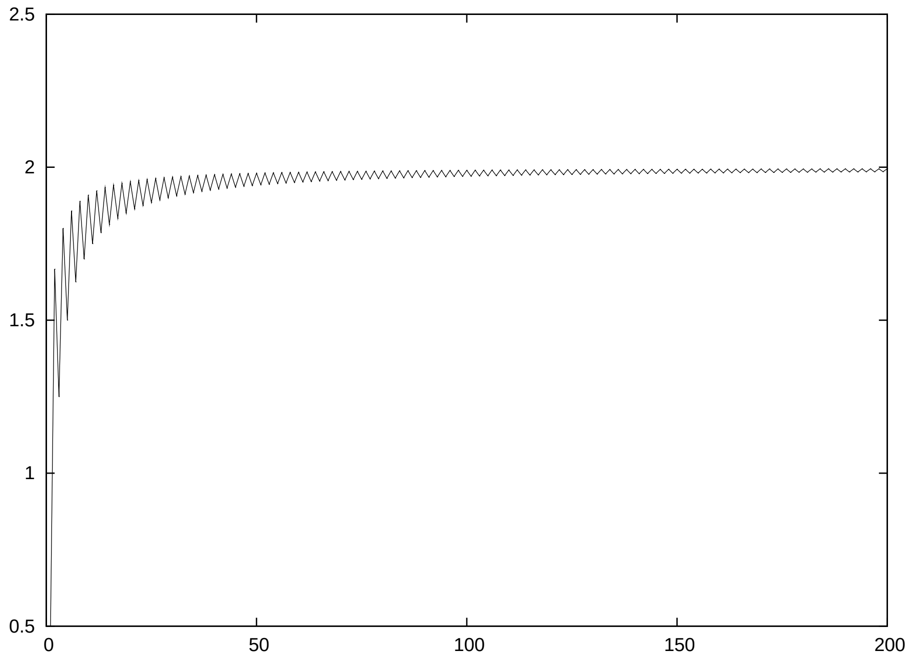
例 2.

$$a_n = \frac{2n + (-1)^n}{n+1}$$

の極限を考える. n に具体的な数字を入れて計算してみると,

$$a_{10} = \frac{20+1}{10+1} = 1.909$$
$$a_{100} = \frac{200+1}{100+1} = 1.990$$
$$a_{1000} = \frac{2000+1}{1000+1} = 1.999$$

となる. さらに計算機で図を書いてみよう. 横軸が n, 縦軸が a_n の値であり, 見やすいように隣り合う a_n を線で結んだ. 図を見ると a_n は 2 に近づく一方なので, 2 に収束する. 言い換えると a_n の極限値は 2 である.



この数列の極限値を n に何回も数字を代入したり, 計算機で図を書いたりせずに求めることができないだろうか？ 実は次に紹介する極限の基本公式を使えば, 簡単に求めることが可能だ.

定理 2 (極限の基本公式)**.** $\{a_n\}$, $\{b_n\}$ を収束する実数列とする.

(1). $\lim_{n\to\infty}(a_n+b_n) = \lim_{n\to\infty} a_n + \lim_{n\to\infty} b_n$

(2). $\lim_{n\to\infty} a_n b_n = \lim_{n\to\infty} a_n \cdot \lim_{n\to\infty} b_n$

(3). $\lim_{n\to\infty} \frac{a_n}{b_n} = \frac{\lim_{n\to\infty} a_n}{\lim_{n\to\infty} b_n}$ *(ただし, $b_n \neq 0$, $\lim_{n\to\infty} b_n \neq 0$)*

例 3. 例 2 の数列 $a_n = \frac{2n+(-1)^n}{n+1}$ の極限を計算してみよう. まず分子分母を n で割って,

$$a_n = \frac{2+\frac{(-1)^n}{n}}{1+\frac{1}{n}}$$

と変形する. ここで分かりやすいように, $b_n = \frac{(-1)^n}{n}$, $c_n = \frac{1}{n}$ とおこう. すると b_n, c_n はわかりやすい数列で, それぞれ

$$-1,\ \frac{1}{2},\ -\frac{1}{3},\ \frac{1}{4},\ -\frac{1}{5}\ \cdots$$
$$1,\ \frac{1}{2},\ \frac{1}{3},\ \frac{1}{4},\ \frac{1}{5}\ \cdots$$

なので, $\lim_{n\to\infty} b_n = 0$, $\lim_{n\to\infty} c_n = 0$ となることが簡単にわかる. 極限の公式 (3) と (1) と順に使うと,

$$\lim_{n\to\infty} a_n = \frac{\lim_{n\to\infty}(2+b_n)}{\lim_{n\to\infty}(1+c_n)} = \frac{2+\lim_{n\to\infty} b_n}{1+\lim_{n\to\infty} c_n} = \frac{2+0}{1+0} = 2$$

を得る.

上は収束する数列に関する公式だが, もちろんどんな数列でも収束するとは限らない.

例 4 (収束しない数列)**.**

$$a_n = (-1)^n, \quad n = 1, 2, \ldots$$

この数列はどんなに n を大きくしても -1 と 1 を行ったり来たりするだけなので, 収束しない (極限を持たないとも言う).

例 5.

$$a_n = n, \quad n = 1, 2, \ldots$$

この数列は n を大きくすればするほど, 数列の値が大きくなるだけなので収束しない. この場合特に発散するという.

それでは, どのようなとき数列は収束するだろうか. まず例 2 のように, 極限の基本公式を用いてわかりやすい数列の極限計算に変形できれば, 収束するかどうかがわかる.

基本公式を用いて変形してもわからないときは, 以下の定理を用いると極限の存在を言える場合がある.

数列 $\{a_n\}$ が

$$a_1 \leq a_2 \leq \cdots \leq a_n \leq \cdots$$

を満たすとき, **単調増加**であるという. 逆向きの不等式が成り立つときは, **単調減少**であるという.

定理 3 (単調数列の収束定理)**.** 上に有界な単調増加列は収束する. また, 下に有界な単調減少列は収束する.

付録

極限の基本公式の証明. $\lim_{n\to\infty} a_n = a, \lim_{n\to\infty} b_n = b$ とする.

(1). $|(a_n + b_n) - (a + b)| \leq |a_n - a| + |b_n - b|$ となるので, n を大きくすると, 右辺を限りなく小さくできる. したがって (1) が成り立つ.

(2). $\{b_n\}$ は b に収束するので, 収束の定義で $\varepsilon = 1$ とすると, ある番号 n_0 が決まって, $n \geq n_0$ ならば $|b_n - b| < 1$ が成り立つ. すなわち $b_n - 1 < b < b_n + 1$ である. また $|b_1|, |b_2|, \ldots, |b_{n_0-1}|$ は $n_0 - 1$ 個の数なので, その中の数と 1 より大きな正数 M を取ると, すべての n に対して, $|b_n| < M$ が成り立つ. 最後に

$$\begin{aligned} |a_n b_n - ab| &= |a_n b_n - ab_n + ab_n - ab| \\ &\leq |(a_n - a)b_n| + |a(b_n - b)| \leq |a_n - a|M + |a||b_n - b| \end{aligned}$$

(3). はじめに

$$\lim_{n\to\infty} \frac{1}{b_n} = \frac{1}{b}$$

を示す. すると (2) より,

$$\lim_{n\to\infty} \left(a_n \cdot \frac{1}{b_n} \right) = a \cdot \frac{1}{b}$$

を得る. まず,

$$\frac{1}{b_n} - \frac{1}{b} = \frac{b_n - b}{bb_n}$$

である. b_n は b に収束するので, ある番号 n_0 が決まって, $n \geq n_0$ では, $|b_n| > \frac{1}{2}|b|$ となる. したがって,

$$\left| \frac{1}{b_n} - \frac{1}{b} \right| \leq \frac{2|b_n - b|}{|b|^2}$$

が成り立つ.

□

単調数列の収束定理の証明. 数列 $\{a_n\}$ を上に有界な単調増加列とする. 上限・下限の存在定理 (定理 1) より, $\{a_n\}$ は上限 α を持つ. 命題 **??** より, 任意の正数 $\varepsilon > 0$ に対して, $\alpha - \varepsilon < a_{n_0}$ となる a_{n_0} が $\{a_n\}$ に存在する. いま, $a_{n_0} \leq a_{n_0+1} \leq \cdots$ なので, $n \geq n_0$ ならば, $\alpha - \varepsilon < a_{n_0} \leq a_n$ である. α は $\{a_n\}$ の上界でもあるので, $a_n \leq \alpha (n = 1, 2, \ldots)$ も成り立つ. よって,

$$n \geq n_0 \text{ ならば } \alpha - \varepsilon < a_n < \alpha + \varepsilon$$

となり,

$$n \geq n_0 \text{ ならば } |a_n - \alpha| < \varepsilon$$

が言える. これは a_n が α に収束することを意味する. 下に有界な単調減少列に対しても同様に証明できる. □