微分積分 I　講義ノート　(担当: 関口 良行)

無限数列の極限

微分積分の講義では, まず極限という考え方を紹介する. 前期は数列と関数の極限を学び, その後それらを用いて微分とその応用について学ぶ.

例 1.

$$a_n = \frac{1}{n}, \quad n = 1, 2, \ldots$$

で定義される数列は

$$1, \ \frac{1}{2}, \ \frac{1}{3}, \ \frac{1}{4}, \ \frac{1}{5} \cdots$$

である.

n が大きくなるに従って, この数列の値はどんどん小さくなっていって, 限りなく 0 に近づくことがわかるだろう. このような場合, 数列 a_n の極限は 0 である という. または a_n は 0 に**収束**する という.

例 2.

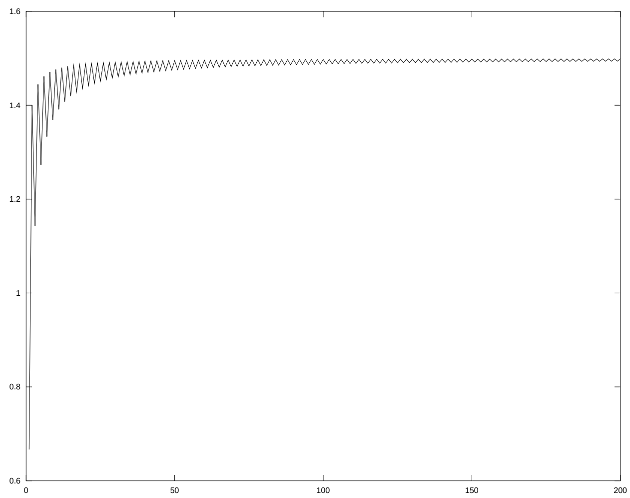
$$a_n = \frac{3n + (-1)^n}{2n + 1}$$

の極限を考える. n に具体的な数字を入れて計算してみると,

$$a_{10} = \frac{3 \cdot 10 + (-1)^{10}}{2 \cdot 10 + 1} = 1.4762, \ a_{100} = \frac{3 \cdot 100 + (-1)^{100}}{2 \cdot 100 + 1} = 1.4975,$$

$$a_{1000} = \frac{3 \cdot 1000 + (-1)^{1000}}{2 \cdot 1000 + 1} = 1.4998$$

となる. さらに計算機で図を書いてみよう. 横軸が n, 縦軸が a_n の値であり, 見やすいように隣り合う a_n を線で結んだ. 図を見ると a_n は 1.5 に近づく一方なので, 1.5 に収束する. 言い換えると a_n の極限は 1.5 である.



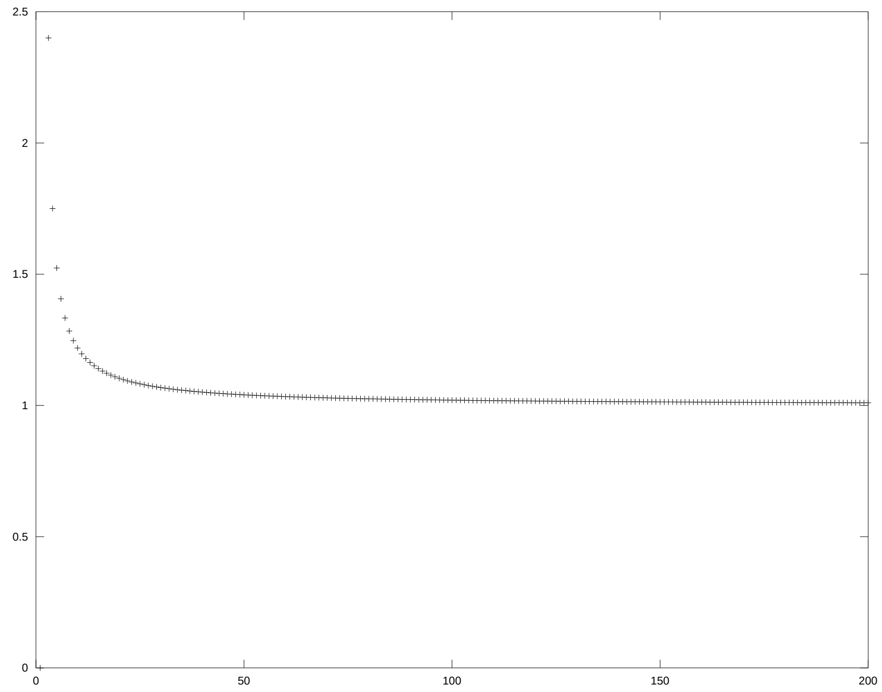
例 3.

$$a_n = \frac{n^2 + 2n - 3}{x^2 - 4}$$

の極限はどうだろうか. n に大きな数をいれていくと

$$a_{10} = \frac{10^2 + 2 \cdot 10 - 3}{10^2 - 4} = 1.2188$$
$$a_{100} = \frac{100^2 + 2 \cdot 100 - 3}{100^2 - 4} = 1.0201$$
$$a_{1000} = \frac{1000^2 + 2 \cdot 1000 - 3}{1000^2 - 4} = 1.0020$$

となる. 図も書いてみよう.



図を見ると a_n は 1 に近づく一方なので, 1 に収束する. この数列の極限値を n に何回も数字を代入したり, 計算機で図を書いたりせずに求めることができないだろうか？

まず, 極限をきちんと定義しよう.

定義 (直感的)**.** 無限数列 $a_1, a_2, \ldots, a_n, \ldots$ において, n が限りなく大きくなるとき, a_n が一定の数 α に近づくならば, 数列 $\{a_n\}$ は α に**収束**するといい,

$$\lim_{n\to\infty} a_n = \alpha \text{ または } a_n \to \alpha \ (n \to \infty)$$

と書く. このとき, α を $\{a_n\}$ の**極限**と呼ぶ.

記号的に書くと,

定義 (ダランベール, 1765, コーシー 1821)**.** $\{a_n\}$ が α に収束するとは, 任意の正数 $\varepsilon > 0$ が与えられると, それに対応して一つの番号 n_0 が

$$n > n_0 \text{ ならば } |a_n - \alpha| < \varepsilon$$

となるように決められることである.

もし, どんなに大きな数 R に対しても, 一つの番号 n_0 が

$$n > n_0 \text{ ならば } a_n > R$$

となるように決められる場合,

$$\lim_{n\to\infty} a_n = \infty \text{ または } a_n \to \infty \ (n \to \infty)$$

と書く.

定理 1 (極限の基本公式)**.** $\{a_n\}$, $\{b_n\}$ を収束する実数列とする.

(1). $\lim_{n\to\infty}(a_n+b_n)=\lim_{n\to\infty}a_n+\lim_{n\to\infty}b_n$

(2). $\lim_{n\to\infty}a_nb_n=\lim_{n\to\infty}a_n\cdot\lim_{n\to\infty}b_n$

(3). $\lim_{n\to\infty}\dfrac{a_n}{b_n}=\dfrac{\lim_{n\to\infty}a_n}{\lim_{n\to\infty}b_n}$ *(ただし, $b_n\neq 0$, $\lim_{n\to\infty}b_n\neq 0$)*

例 4. 例 2 の数列 $a_n=\frac{2n+(-1)^n}{n+1}$ の極限を計算してみよう. まず分子分母を n で割って,

$$a_n=\frac{2+\frac{(-1)^n}{n}}{1+\frac{1}{n}}$$

と変形する. ここで分かりやすいように, $b_n=\frac{(-1)^n}{n}$, $c_n=\frac{1}{n}$ とおこう. すると b_n, c_n はわかりやすい数列で, それぞれ

$$-1,\ \frac{1}{2},\ -\frac{1}{3},\ \frac{1}{4},\ -\frac{1}{5}\ \cdots$$
$$1,\ \frac{1}{2},\ \frac{1}{3},\ \frac{1}{4},\ \frac{1}{5}\ \cdots$$

なので, $\lim_{n\to\infty}b_n=0$, $\lim_{n\to\infty}c_n=0$ となることが簡単にわかる. 極限の公式 (3) と (1) と順に使うと,

$$\lim_{n\to\infty}a_n=\frac{\lim_{n\to\infty}(2+b_n)}{\lim_{n\to\infty}(1+c_n)}=\frac{2+\lim_{n\to\infty}b_n}{1+\lim_{n\to\infty}c_n}=\frac{2+0}{1+0}=2$$

を得る.

上は収束する数列に関する公式だが, もちろんどんな数列でも収束するとは限らない.

例 5 (収束しない数列)**.**

$$a_n=(-1)^n,\quad n=1,2,\dots$$

この数列はどんなに n を大きくしても -1 と 1 を行ったり来たりするだけなので, 収束しない (極限を持たないとも言う).

例 6.

$$a_n=n,\quad n=1,2,\dots$$

この数列は n を大きくすればするほど, 数列の値が大きくなるだけなので収束しない. この場合特に発散するという.

問題. 以下の数列の $n\to\infty$ としたときの極限を求めよ.

$$(1)\ \frac{n^2-2n-3}{3n^2-4}\ (2)\ \frac{1-2^n}{1+2^n}\ (3)\ \sqrt{n+1}-\sqrt{n-1}\ (4)\ \sqrt{n^2+n+1}-n$$

付録

極限の基本公式の証明. $\lim_{n\to\infty} a_n = a$, $\lim_{n\to\infty} b_n = b$ とする.

(1). $|(a_n + b_n) - (a+b)| \leq |a_n - a| + |b_n - b|$ となるので, n を大きくすると, 右辺を限りなく小さくできる. したがって (1) が成り立つ.

(2). $\{b_n\}$ は b に収束するので, 収束の定義で $\varepsilon = 1$ とすると, ある番号 n_0 が決まって, $n \geq n_0$ ならば $|b_n - b| < 1$ が成り立つ. すなわち $b_n - 1 < b < b_n + 1$ である. また $|b_1|, |b_2|, \ldots, |b_{n_0-1}|$ は $n_0 - 1$ 個の数なので, その中の数と 1 より大きな正数 M を取ると, すべての n に対して, $|b_n| < M$ が成り立つ. 最後に

$$\begin{aligned} |a_n b_n - ab| &= |a_n b_n - ab_n + ab_n - ab| \\ &\leq |(a_n - a)b_n| + |a(b_n - b)| \leq |a_n - a|M + |a||b_n - b| \end{aligned}$$

(3). はじめに

$$\lim_{n\to\infty} \frac{1}{b_n} = \frac{1}{b}$$

を示す. すると (2) より,

$$\lim_{n\to\infty} \left(a_n \cdot \frac{1}{b_n} \right) = a \cdot \frac{1}{b}$$

を得る. まず,

$$\frac{1}{b_n} - \frac{1}{b} = \frac{b_n - b}{bb_n}$$

である. b_n は b に収束するので, ある番号 n_0 が決まって, $n \geq n_0$ では, $|b_n| > \frac{1}{2}|b|$ となる. したがって,

$$\left| \frac{1}{b_n} - \frac{1}{b} \right| \leq \frac{2|b_n - b|}{|b|^2}$$

が成り立つ.

□

単調数列の収束定理の証明. 数列 $\{a_n\}$ を上に有界な単調増加列とする. 上限・下限の存在定理 (定理 **??**) より, $\{a_n\}$ は上限 α を持つ. 命題 **??** より, 任意の正数 $\varepsilon > 0$ に対して, $\alpha - \varepsilon < a_{n_0}$ となる a_{n_0} が $\{a_n\}$ に存在する. いま, $a_{n_0} \leq a_{n_0+1} \leq \cdots$ なので, $n \geq n_0$ ならば, $\alpha - \varepsilon < a_{n_0} \leq a_n$ である. α は $\{a_n\}$ の上界でもあるので, $a_n \leq \alpha (n = 1, 2, \ldots)$ も成り立つ. よって,

$$n \geq n_0 \text{ ならば } \alpha - \varepsilon < a_n < \alpha + \varepsilon$$

となり,

$$n \geq n_0 \text{ ならば } |a_n - \alpha| < \varepsilon$$

が言える. これは a_n が α に収束することを意味する. 下に有界な単調減少列に対しても同様に証明できる. □