微分積分 II　期末試験　(2009 年度, 担当: 関口 良行)

計算過程も記述すること

1. 積分せよ.

(1) $\displaystyle\int \frac{x^3-3}{x^3-x^2-x+1}\,dx$　(2) $\displaystyle\int \frac{1}{2+\sin x}\,dx$　(3) $\displaystyle\int_1^\infty \frac{dx}{x(1+x^2)}$

2. 正の定数 $a, b > 0$ に対して, 曲線 $y = \dfrac{a}{2}\left(e^{\frac{x}{a}} + e^{-\frac{x}{a}}\right)$ (懸垂線と呼ばれる) の $-b \leq x \leq b$ の部分の長さを求めよ.

3. 偏微分に関する次の問いに答えよ.

(1) $f(x,y) = \sin^{-1}\dfrac{y}{x}$ $(x > 0)$ に対して, f_x, f_y を求めよ.

(2) $f(x,y) = x\cos\sqrt{y}$, $x(u,v) = uv$, $y(u,v) = u^2+v^2$ に対して,
合成関数 $z(u,v) = f(x(u,v), y(u,v))$ の偏導関数 z_u, z_v を求めよ.

4. 次の函数の極値を求めよ.

$$f(x,y) = x^3 + 2x^2 + xy + y^2 + x + 2y + 3$$

5. 以下の重積分を計算せよ.

(1) $\displaystyle\iint_D x\,dxdy$, ここで D は直線 $y = x+2$ と放物線 $y = x^2$ で囲まれた領域とする.

(2) $\displaystyle\iint_D \frac{dxdy}{\sqrt{4-x^2-y^2}}$, ここで $D = \{(x,y) \mid 0 \leq x^2+y^2 \leq 3, x \geq 0, x-y \geq 0\}$.

(3) $\displaystyle\iint_D \cos(8x+8y)\,dxdy$, ここで $D = \left\{(x,y) \mid 0 \leq 2x+3y \leq \frac{\pi}{4},\ \pi \leq 2x-y \leq 2\pi\right\}$.