微分積分 II　自習問題　(2009 年度, 担当: 関口 良行)

1. 講義中に配ったプリント, 教科書の問題も解けるようにしておくこと
2. 答えは非公開です. 自力, または友人と相談して解いてください.
3. 質問は受け付けますが, 直接答えは聞かないでください.

1. 積分を計算せよ.

(1) $\displaystyle\int \frac{3x^2+5x-4}{x^3+x^2-x-1}\,dx$　(2) $\displaystyle\int \frac{x^3-3}{x^2+x-6}\,dx$　(3) $\displaystyle\int \cos^3 x \sin x\,dx$

(4) $\displaystyle\int \frac{1}{1-\cos x}\,dx$　(5) $\displaystyle\int \frac{1}{2e^x+3e^{-x}}\,dx$　(6) $\displaystyle\int_0^1 \frac{1}{\sqrt{x(1-x)}}\,dx$　(7) $\displaystyle\int_1^\infty \frac{1}{x(x+2)^2}\,dx$

2. 次の曲線の長さを求めよ.

(1) $y=x^2$ の $0 \le x \le 1$ の部分.

(2) サイクロイド $x=a(\theta-\sin\theta), y=a(1-\cos\theta)$ の $0 \le \theta \le 2\pi$ の部分.

3. 次の偏微分に関する問に答えよ.

(1) $f(x,y)=\tan^{-1}\dfrac{y}{x}$ に対して, f_x, f_y を求めよ.

(2) $f(x,y)=\tan^{-1}(x+y),\ x(t)=\cos t,\ y(t)=\sin t$ に対して,
合成関数 $z(t)=f(x(t),y(t))$ の導関数 dz/dt を求めよ.

(3) $f(x,y)=f(x,y)=e^x\sin y,\ x(u,v)=u+v,\ y(u,v)=u-v$ に対して,
合成関数 $z(u,v)=f(x(u,v),y(u,v))$ の偏導関数 z_u, z_v を求めよ.

(4) $f(x,y)=e^{-y}(x-2y)$ に対して, $2f_x+f_y+f=0$ が成り立つことを示せ.

4. 極値を求めよ

(1) $f(x,y)=x^3+y^3-9xy+1$　(2) $f(x,y)=x^3+y^3-6x-6y$

5. 次の重積分を計算せよ.

(1) $\displaystyle\iint_D xy\,dx$, D は直線 $y=x$ と放物線 $y=x^2$ で囲まれた領域.

(2) $\displaystyle\iint_D \sin(x+2y)\,dx,\ \ D=\{(x,y) \mid 0 \le x \le \pi/2,\ 0 \le y \le x\}.$

(3) $\displaystyle\iint_D \sqrt{7-2x^2-2y^2}\,dxdy,\ \ D=\{(x,y) \mid 1 \le x^2+y^2 \le 3,\ x \ge 0,\ y \ge 0\}.$

(4) $\displaystyle\iint_D \frac{dxdy}{\sqrt{1+x^2+y^2}}\,dxdy,\ \ D=\{(x,y) \mid x^2+y^2 \le 1,\ x-y \ge 0\}.$

(5) $\displaystyle\iint_D 7x\,dxdy,\ \ D=\{(x,y) \mid -1 \le 2x+y \le 1,\ -1 \le 3x-2y \le 1\}.$

(6) $\displaystyle\iint_D (x^2+3xy+2y^2)\,dxdy,\ \ D=\{(x,y) \mid 0 \le x+y \le 1,\ 0 \le x+2y \le 1\}.$