複素解析　（担当: 関口 良行）

［定理］　1. $a(t)$ を実数区間 $[\alpha, \beta]$ から実数への関数とする．
$\{A(t)\}' = a(t)$ を満たす関数 $A(t)$ が存在するとき[1]，

$$\int_\alpha^\beta a(t)\,dt = A(\beta) - A(\alpha)$$

が成り立つ．

[1] このような関数 $A(t)$ を $a(t)$ の **原始関数** と呼ぶ．

［定理］　2. $f(t)$ を実数区間 $[\alpha, \beta]$ から 複素数 への関数とする．
$\{F(t)\}' = f(t)$ を満たす関数が存在するとき，

$$\int_\alpha^\beta f(t)\,dt = F(\beta) - F(\alpha)$$

が成り立つ．

［証明］．定義より，

$$\{F(t)\}' = \{\mathrm{Re}\,F(t)\}' + i\{\mathrm{Im}\,F(t)\}' = f(t)$$

となるので，

$$\{\mathrm{Re}\,F(t)\}' = \mathrm{Re}\,f(t), \quad \{\mathrm{Im}\,F(t)\}' = \mathrm{Im}\,f(t)$$

が成り立つ[2]．よって，定理 1 より

$$\int_\alpha^\beta \mathrm{Re}\,f(s)\,ds = \mathrm{Re}\,F(\beta) - \mathrm{Re}\,F(\alpha),$$
$$\int_\alpha^\beta \mathrm{Im}\,f(s)\,ds = \mathrm{Im}\,F(\beta) - \mathrm{Im}\,F(\alpha)$$

が成り立つ．したがって，

$$\begin{aligned}\int_\alpha^\beta f(t)\,dt &= \int_\alpha^\beta \mathrm{Re}\,f(s)\,ds + i\int_\alpha^\beta \mathrm{Im}\,f(s)\,ds \\ &= \mathrm{Re}\,F(\beta) - \mathrm{Re}\,F(\alpha) + i\,\{\mathrm{Im}\,F(\beta) - \mathrm{Im}\,F(\alpha)\} \\ &= \mathrm{Re}\,F(\beta) + i\,\mathrm{Im}\,F(\beta) - \{\mathrm{Re}\,F(\alpha) + i\,\mathrm{Im}\,F(\alpha)\} \\ &= F(\beta) - F(\alpha)\end{aligned}$$

が成り立つ．

□

[2] $\mathrm{Re}\,F(t)$ は実数から実数への関数であり，この式より $\mathrm{Re}\,f(t)$ の原始関数である．$\mathrm{Im}\,F(t)$ も同様．