凸代数幾何と最適化理論

関口 良行

目 次

1 導入 **2**

2 半正定値計画問題 **2**
2.1 双対問題 3
2.1.1 準備 4
2.1.2 ラグランジュ双対の書き換え 4
2.1.3 相補性条件 5
2.2 双対定理 6

3 多項式最適化問題と半正定値緩和 **7**
3.1 多項式の最小化 7
3.2 2 乗和多項式 7
3.2.1 2 乗和多項式と半正定値行列 7

4 二者択一の定理 **10**
4.1 線形系に対する二者択一の定理 10
4.1.1 線形不等式系 10
4.2 多項式系に対する二者択一の定理 11
4.2.1 準備 11
4.2.2 複素零点定理 12
4.2.3 実零点定理 13
4.2.4 実零点定理 14
4.3 不等式系の解の存在定理 16

5 非負多項式の表現定理 **17**
5.1 半代数的集合上の最適化 17
5.1.1 準備 17
5.1.2 正値多項式の表現定理 18
5.1.3 Putinar の定理 18
5.1.4 二乗和緩和問題の例 19
5.2 モーメント問題と正値写像の表現定理 20
5.2.1 正値写像の表現 21
5.2.2 半代数的集合と正値写像 21

5.2.3　モーメント緩和問題の例 22

6　最適化と代数幾何 **24**
6.1　KKT 条件 24
6.2　最適値関数 24
6.2.1　代数多様体の共通部分 25

7　代数幾何の基本概念 **27**
7.1　射影空間 27
7.1.1　斉次化と射影化 27
7.2　位相 29
7.3　既約性 30
7.4　次元 31
7.5　接空間 32
7.6　非特異性 33
7.7　Genericity 33

8　多項式最適化問題の代数幾何 **34**
8.1　Generic な多項式最適化問題 34
8.2　行列式多様体 36
8.2.1　代数多様体の射 36
8.2.2　ファイバーの次元定理 38
8.2.3　交叉の存在性 40
8.2.4　行列式多様体の次元と特異点 41
8.3　代数次数 42
8.3.1　代数多様体の次数 43
8.3.2　行列式多様体の次数 45
8.3.3　多項式最適化問題の代数次数 46

1　導入

凸代数幾何と最適化理論の概要を説明する．以下，代数，幾何，解析の非常に基本的な知識，記号は知っているものと仮定するが，ほとんどの場合に定義は紹介する．定理の証明については，その証明が重要かどうかよりも，扱っている話題の雰囲気をつかむのに適したものを優先的に証明することとする．

2　半正定値計画問題

次の最適化問題を半正定値計画問題と呼ぶ．

$$
\begin{aligned}
(\mathcal{P})\ \min\quad & \langle C, X\rangle \\
\text{s.t.}\quad & \langle A_i, X\rangle = b_i, \quad i = 1, \ldots, m, \\
& X \succeq O
\end{aligned}
$$

ここで，$A_i, C \in \mathbb{S}^n$，$b \in \mathbb{R}^n$ とする．使用されている記号は次のように定義される．

定義 2.1. $\mathbb{S}^n$ を $n \times n$ 対称行列の集合，$\mathbb{S}^n_+$，$\mathbb{S}^n_{++}$ をそれぞれ $\mathbb{S}^n$ 内の半正定値行列，正定値行列の集合とする．$A, B \in \mathbb{R}^{n\times n}$ に対して，

- $\langle A, B\rangle := \mathrm{tr}(AB^T) = \sum_{i,j} a_{ij}b_{ij}$
- $A \succeq O \Longleftrightarrow A \in \mathbb{S}^n_+$
- $A \succ O \Longleftrightarrow A \in \mathbb{S}^n_{++}$

上記の順序記号は，行列の大きさが自然に決まる場合に頻繁に使用する．

例 2.2.

$$\begin{aligned} \min \quad & 2x_{11} + 2x_{12} \\ \text{s.t.} \quad & x_{11} + x_{22} = 1 \\ & \begin{pmatrix} x_{11} & x_{12} \\ x_{12} & x_{22} \end{pmatrix} \succeq O \end{aligned}$$

ここで，$C = \left(\begin{smallmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 0 \end{smallmatrix}\right)$，$A = \left(\begin{smallmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{smallmatrix}\right)$，$b = 1$ とおけば $(\mathcal{P})$ の形となる．制約は $x_{11}(1 - x_1) - x_{12}^2 \geq 0$，$x_{11} \geq 0$，$1 - x_{11} \geq 0$ と書け，

$$\left(x_{11} - \frac{1}{2}\right)^2 + x_{12}^2 \leq \frac{1}{4}$$

と同値になる．これは円を表しているので，最小値は $1 - \sqrt{2}$ となり，そのときの X は

$$X = \begin{pmatrix} \frac{2-\sqrt{2}}{4} & -\frac{\sqrt{2}}{4} \\ -\frac{\sqrt{2}}{4} & \frac{2+\sqrt{2}}{4} \end{pmatrix}.$$

2.1 双対問題

ラグランジュ双対

$$L(X, y) = \langle C, X\rangle + \sum_i y_i \left(b_i - \langle A_i, X\rangle\right)$$

とおくと，

$$\inf(\mathcal{P}) = \inf_{X\succeq O} \sup_{y\in\mathbb{R}^m} L(X, y) \geq \sup_{y\in\mathbb{R}^m} \inf_{X\succeq O} L(X, y)$$

を得る．ここで，$\sup_{y\in\mathbb{R}^m} \inf_{X\succeq O} L(X, y)$ を $(\mathcal{P})$ の **ラグランジュ双対** と呼ぶ．計算を進めて，内側の inf を外してみよう．

2.1.1 準備

まず，次の定理が必要である．

定理 2.3. $A, B \in \mathbb{R}^{n\times n}$ に対して，

$$\begin{aligned}\mathrm{tr}(A) &= \mathrm{tr}(A^T)\\ \mathrm{tr}(AB) &= \mathrm{tr}(BA)\\ \mathrm{tr}(AB^T) &= \sum\nolimits_{i,j} a_{ij}b_{ij},\end{aligned}$$

定理より， $A, B \in \mathbb{R}^{n\times n}$ に対して，

$$\langle A, B\rangle = \mathrm{tr}(AB^T) = \mathrm{tr}(B^TA) = \mathrm{tr}(A^TB) = \mathrm{tr}(BA^T) = \langle B, A\rangle$$

より，$\langle\cdot,\cdot\rangle$ は $R^{n\times n}$ 上の内積になる．これより，ノルムが

$$\|A\| := \sqrt{\langle A, A\rangle} = \sqrt{\mathrm{tr}(AA^T)} = \sqrt{\sum\nolimits_{i,j} a_{ij}^2}$$

と定義される．

定理 2.4. $A \in \mathbb{S}^n$ に対して，

$$A \in \mathbb{S}^n_+ \Longleftrightarrow \langle A, B\rangle \geq 0,\ \forall B \in \mathbb{S}^n_+$$

特に $A, B \in \mathbb{S}^n_+$ のとき，$\langle A, B\rangle = 0$ は $AB = 0$ と同値である．

Proof. $A, B \in \mathbb{S}^n_+$ に対して，

$$\langle A, B\rangle = \mathrm{tr}(A^{1/2}A^{1/2}B^{1/2}B^{1/2}) = \mathrm{tr}(B^{1/2}A^{1/2}A^{1/2}B^{1/2}) = \|A^{1/2}B^{1/2}\|^2 \geq 0$$

が成り立つ．

逆に，$A \in \mathbb{R}^{n\times n}$ に対して，$\langle A, B\rangle \geq 0,\ \forall B \in \mathbb{S}^n_+$ が成り立つとする．特に，任意の $x \in \mathbb{R}^n$ に対して，$xx^T \in \mathbb{S}^n_+$ であるので，

$$0 \leq \langle A, xx^T\rangle = \mathrm{tr}(Axx^T) = \sum_{i,j} a_{i,j}x_ix_j = x^TAx$$

が成り立つ．よって，$A \in \mathbb{S}^n_+$ である．

特に，$\langle A, B\rangle = 0$ のとき，$A^{1/2}B^{1/2} = O$ なので，$AB = O$ が成り立つ． □

2.1.2 ラグランジュ双対の書き換え

いま，

$$L(X, y) = \langle C, X\rangle + \sum_i y_i\left(b_i - \langle A_i, X\rangle\right) = b^Ty + \langle C - \sum_i y_iA_i, X\rangle$$

となる．$X \succeq O$ のとき，定理 2.4 より，

$$\inf_{X \succeq O} \langle M, X \rangle = \begin{cases} 0 & (M \succeq O) \\ -\infty & (M \not\succeq O) \end{cases}$$

より，

$$\sup_{y \in \mathbb{R}^m} \inf_{X \succeq O} L(X, y) = \sup_{y \in \mathbb{R}^m} \left\{ b^T y : C - \sum\nolimits_i y_i A_i \succeq O \right\}$$

を得る．よって，ラグランジュ双対は

$$\begin{aligned} (\mathcal{D}) \ \max \quad & b^T y \\ \text{s.t.} \quad & C - \sum_i y_i A_i \succeq O \end{aligned}$$

となり，$(\mathcal{D})$ を半正定値計画問題の主問題 $(\mathcal{P})$ に対する **双対問題** と呼ぶ．

問題の構成から

$$\inf(\mathcal{P}) \geq \sup(\mathcal{D})$$

が成り立つ．

2.1.3 相補性条件

双対問題を利用すると，次の最適性条件を得る．

命題 2.5. X，y をそれぞれ $(\mathcal{P})$，$(\mathcal{D})$ の実行可能解とする．それらが

$$\text{（相補性条件）} \quad \left(C - \sum\nolimits_i y_i A_i \right) X = O$$

を満たすならば，X，y はそれぞれの問題の最適解である．

Proof. いま，定理 2.4 より，

$$\left\langle C - \sum\nolimits_i y_i A_i, X \right\rangle = 0$$

が成り立つ．よって，$\langle C, X \rangle = \langle \sum_i y_i A_i, X \rangle = \sum_i y_i \langle A_i, X \rangle = b^T y$ を得る．一方，

$$\langle C, X \rangle \geq \inf(\mathcal{P}) \geq \sup(\mathcal{D}) \geq b^T y$$

より，$\langle C, X \rangle = \inf(\mathcal{P}) = \sup(\mathcal{D}) = b^T y$ である． □

命題 2.6. 半正定値計画問題の主問題と双対問題が最適解を持ち，最適値が等しいならば，$Z(y) := C - \sum_{i=1}^m y_i A_i$ に対して，

$$X, Y \in \mathbb{S}^n \text{ が最適解である} \iff \begin{cases} \langle A_i, X \rangle = b_i, \ i = 1, \ldots, m, \\ \langle Z(y), X \rangle = 0, \\ Z(y) \succeq O, \quad X \succeq O \end{cases}$$

が成り立つ．

Proof. 相補性条件 2.5 より，$\Longleftarrow$ が成り立つ．次に $\Longrightarrow$ を示す．両問題に最適解 $X \succeq O$, $y \in \mathbb{R}^m$ が存在して，最適値が等しいとする．すると，$\langle Z(y), X\rangle = \langle C, X\rangle - \sum_i y_i \langle A_i, X\rangle = \langle C, X\rangle - b^T y = 0$ となり，結論の式を得る． □

例 2.7. 例 2.2 の双対問題は，

$$\begin{aligned} &\max \quad y \\ &\text{s.t.} \quad \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} - y \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2-y & 1 \\ 1 & -y \end{pmatrix} \succeq O \end{aligned}$$

となる．いま，双対問題の定義式の b は 1 である．制約は $-y(2-y)-1 \geq 0$, $2-y \geq 0$, $-y \geq 0$ となるので，最大値は $y = 1-\sqrt{2}$ である．よって，主問題と双対問題の最適値は等しい．いま，$(\mathcal{P})$ の解との間の相補性条件は，

$$\begin{pmatrix} 1+\sqrt{2} & 1 \\ 1 & -1+\sqrt{2} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \frac{2-\sqrt{2}}{4} & -\frac{\sqrt{2}}{4} \\ -\frac{\sqrt{2}}{4} & \frac{2+\sqrt{2}}{4} \end{pmatrix} = O$$

となり，成り立っている．

2.2 双対定理

相補性条件を満たす実行可能解を見つけなくとも，最適解の存在は次のように保証される．以降 $A_1, \ldots, A_m$ は一次独立と仮定する．なお，一次従属の場合は問題を変形して，一次独立なものに書き換えることができる．

定義 2.8. $(\mathcal{P})$ に対して，

$$\langle A_i, X\rangle = b_i,\ X \succ O$$

を満たす X が存在するとき，$(\mathcal{P})$ は strictly feasible であるという．$(\mathcal{D})$ に対して，

$$C - \sum_i y_i A_i \succ O$$

を満たす y_i が存在するとき，$(\mathcal{D})$ は strictly feasible であるという．

定理 2.9. 半正定値計画問題の主問題と双対問題が *strictly feasible* であれば，それぞれの問題に最適解が存在し，最適値は一致する．

3　多項式最適化問題と半正定値緩和

$\mathbb{R}[x]$，$x = (x_1, \ldots, x_n)$ を実係数多項式の集合とする．次の問題を多項式最適化問題と呼ぶ.

$$\begin{aligned} \inf_{x \in \mathbb{R}^n} \quad & f(x) \\ \text{s.t} \quad & g_i(x) \geq 0, \quad i = 1, \ldots, m, \\ & h_j(x) = 0, \quad j = 1, \ldots, m_e \end{aligned}$$

ここで，$f, g_i, h_j \in \mathbb{R}[x]$ である.

3.1　多項式の最小化

まずは制約のない問題を考えよう.

$$\inf \quad f(x),\ x \in \mathbb{R}^n$$

ここで，$f(x) \in \mathbb{R}[x]$ である．するとこの問題は

$$\sup \quad r \quad \text{s.t. } f(x) - r \geq 0,\ \forall x \in \mathbb{R}^n$$

と明らかに同値になる．一般に，与えられた多項式が非負多項式であるか判定する問題は難しいので，この変形にはあまり意味がない．しかし，多項式が「非負多項式」であるという条件を,「二乗和多項式」であるという条件と置き換えると，問題はずいぶん簡単になることが分かる.

3.2　2 乗和多項式

問題. n 変数多項式 $f(x)$ が多項式の二乗和で書ける；

$$f = f_1^2 + \cdots + f_2^2$$

とき，$f(x) \geq 0,\ \forall x \in \mathbb{R}^n$ である.

では逆は成り立つか？つまり，$f(x) \geq 0,\ \forall x \in \mathbb{R}^n$ であるとき，f は多項式の 2 乗和で書けるか？

例えば，$f(x, y) = 1 - 3x^2y^2 + x^2y^4 + x^4y^2$ を考えると，$f(x, y) \geq 0,\ \forall (x, y) \in \mathbb{R}^2$ であるが，f は多項式の二乗和では書けない．よって，逆は成り立たない．しかし，多くの非負多項式が二乗和多項式である.

3.2.1　2 乗和多項式と半正定値行列

いま $\alpha = (\alpha_1, \ldots, \alpha_n) \in \mathbb{N}^n$ に対して，$x^\alpha = x_1^{\alpha_1} \cdots x_n^{\alpha_n},\ |\alpha| = \sum_{i=1}^n \alpha_i$ とする.

命題 3.1. f を次数 $2d$ を持つ多項式とする．すると，

$$f \text{ が 2 乗和多項式である} \iff \exists X : \text{半正定値行列},\ f = u^T X u$$

が成り立つ．ここで，$u = (x^\alpha)_{|\alpha| \le d}$ である．

解説. $d = 2$ の場合示す．他の場合も同様である．$f = f_1^2 + \cdots + f_n^2,\ \deg f = 4$ とする．いま，

$$u = (x^\alpha)_{|\alpha| \le d} = (1, x_1, x_2, x_1 x_2, x_1^2, x_2^2)^T$$

となる．

$$f_k = f_{k,00} + f_{k,10}\, x_1 + f_{k,01}\, x_2 + f_{k,11}\, x_1 x_2 + f_{k,20}\, x_1^2 + f_{k,02}\, x_2^2$$

に対して，横ベクトル $(f_{k,\alpha})_\alpha$ を第 k 行にもつ行列を M とすると，

$$\begin{aligned} f &= \begin{bmatrix} f_1 & f_2 & \cdots & f_n \end{bmatrix} \begin{bmatrix} f_1 \\ f_2 \\ \vdots \\ f_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} f_1 & f_2 & \cdots & f_n \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \sum_\alpha f_{1,\alpha} x^\alpha \\ \sum_\alpha f_{2,\alpha} x^\alpha \\ \vdots \\ \sum_\alpha f_{n,\alpha} x^\alpha \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} f_1 & f_2 & \cdots & f_n \end{bmatrix} \begin{bmatrix} f_{1,00} & f_{1,10} & f_{1,01} & f_{1,11} & f_{1,20} & f_{1,02} \\ f_{2,00} & f_{2,10} & f_{2,01} & f_{2,11} & f_{2,20} & f_{2,02} \\ \vdots & & & & & \\ f_{n,00} & f_{n,10} & f_{n,01} & f_{n,11} & f_{n,20} & f_{n,02} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 \\ x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_2^2 \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} f_1 & f_2 & \cdots & f_n \end{bmatrix} Mu = u^T M^T M u \end{aligned}$$

となる．$X = M^T M$ とおくと，X は半正定値行列なので，必要性が得られる．十分性は，X が半正定値行列であれば，ある実行列 M が存在して，$X = M^T M$ と書けることから従う．

この命題より，制約なしの多項式最適化問題に対して，半正定値計画問題を用いて，以下のように近似解を求めることができる．ここで $f(x) = \sum_\alpha f_\alpha x^\alpha$，$2d = \deg f$ に対して，係数 f_α を並べたベクトルを $\boldsymbol{f}$，$u = (x^\alpha)_{|\alpha| \le 2d}$ とし，$f(x) = \boldsymbol{f}^T u$ と書く．また $v = (x^\alpha)_{|\alpha| \le d}$ とする．

$$\begin{aligned} \inf \quad f(x),\ x \in \mathbb{R}^n &= \sup \quad r \quad \text{s.t. } f(x) - r \ge 0,\ r \in \mathbb{R} \\ &\ge \sup \quad r \quad \text{s.t. } f(x) - r \text{ は二乗和多項式} \\ &= \sup \quad r \quad \text{s.t. } \boldsymbol{f}^T u - r = v^T X v,\ X \text{ は半正定値} \end{aligned}$$

最後の問題の制約で，x^α に関して係数比較をする．いま，

$$v^T X v = (x^\alpha)_\alpha^T X (x^\beta)_\beta = (1, x_1, x_2, \ldots, x_n^d) X \begin{pmatrix} 1 \\ x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n^d \end{pmatrix}$$

に対して，ベクトルの添字 α, β に対応する行列 X の成分を $X_{\alpha,\beta}$ とおくと，
$v^T X v = \sum_{\alpha,\beta} X_{\alpha,\beta} x^\alpha x^\beta$ と書くことができ，制約は，

$$f_0 - r = X_{00}, \quad f_\gamma = \sum_{\alpha+\beta=\gamma} X_{\alpha,\beta}$$

と書ける．よって，最後の問題は半正定値計画問題になる．

4　二者択一の定理

次に，制約つきの最適化問題について考える．制約つきの最適化問題を解くに際に重要な役割を果たすのが，ファルカスの補題などの二者択一の定理である．

4.1　線形系に対する二者択一の定理

まず，連立 1 次方程式 $Ax = b$ に対して，

$$Ax = b \text{ が解を持たない} \Longleftrightarrow \operatorname{rank} A < \operatorname{rank}[A\ b]$$

が成り立つ．これを次のように書き換える．まず，A の i 行をベクトル $a_i \in \mathbb{R}^n$，$b = (b_1, \ldots, b_m) \in \mathbb{R}^m$ とし，

$$\mathbb{R}\langle (a_1, b_1), \ldots, (a_m, b_m) \rangle = \{ r_1(a_1, b_1) + \cdots + r_m(a_m, b_m) \mid r_i \in \mathbb{R} \} \subset \mathbb{R}^{n+1}$$

とおく．すると，$Ax = b$ が解を持たないということは，行基本変形（ガウスの消去法）により，

$$\begin{bmatrix} A & b \end{bmatrix} \longrightarrow \begin{bmatrix} 1 & & & & \\ & 1 & & & \\ & & 1 & & \\ & & & 1 & \\ & & & & \end{bmatrix}$$

という階段行列が得られるということなので，

$$Ax = b \text{ が解を持たない} \Longleftrightarrow (0, \ldots, 0, 1) \in \mathbb{R}\langle (a_1, b_1), \ldots, (a_m, b_m) \rangle$$

と言い替えるえられる．

4.1.1　線形不等式系

連立 1 次不等式に関しては以下の補題が有名である．

補題 4.1 (ファルカスの補題の亜種)**.** 行列 $A \in \mathbb{R}^{m \times n}$, $b \in \mathbb{R}^m$ に対して，

$$Ax \leq b \text{ が，解を持たない} \Longleftrightarrow \exists y \in \mathbb{R}^n_+ \ s.t.\ A^T y = 0,\ b^T y < 0.$$

ここで，$\mathbb{R}_+ = [0, \infty)$ である．

こちらも同様の形式に書き換える．一般に，(適切な演算が定義された）集合 K, R と，$f_1, \ldots, f_m \in R$ に対して，

$$K\langle f_1, \ldots, f_m \rangle := \{ k_1 f_1 + \cdots + k_m f_m \mid k_i \in K \}$$

と定義する [1]．すると，

[1] 代数における加群と近いものである．

$Ax \leq b$ が解を持たない $\Longleftrightarrow (0, \ldots, 0, -1) \in \mathbb{R}_+\langle (a_1, b_1), \ldots, (a_m, b_m)\rangle$

と言い替えられる．制約つきの最適化問題の最適性条件である KKT 条件は，問題を線形化した後，この補題を用いて双対を求めることで，得ることができる．

このような書き替えにより，二者択一の定理を代数におけるイデアルの考え方と結びつけることができる．

4.2 多項式系に対する二者択一の定理

複素数 $\mathbb{C}$ を係数とする多項式の集合を $\mathbb{C}[x]$ とする．いま一変数多項式の系

$$\begin{cases} f_1(x) = 0 \\ f_2(x) = 0 \end{cases}$$

が，$\mathbb{C}$ に解を持つかどうか調べよう．上の系が解を持たないとすると，$f_1(x)$ と $f_2(x)$ は共通因子を持たない．よって，ユークリッドの互除法[2]より，ある多項式 $a_1(x), a_2(x) \in \mathbb{C}[x]$ が存在して，

[2] 拡張されたユークリッドの互除法と呼ばれることが多い．

$$a_1(x)f_1(x) + a_2(x)f_2(x) = 1$$

が成り立つ．したがって，$1 \in \mathbb{C}[x]\langle f_1, f_2\rangle := \{a_1f_1 + a_2f_2 \mid a_1, a_2 \in \mathbb{C}[x]\}$ が成り立つ．逆に解を持てば $1 \notin \mathbb{C}[x]\langle f_1, f_2\rangle$ となるので，

$$f_1(x) = f_2(x) = 0 \text{ が解を持たない } \Longleftrightarrow 1 \in \mathbb{C}[x]\langle f_1, f_2\rangle$$

が成り立つ．

4.2.1 準備

一般に n 変数多項式を考える前に少し用語を準備する．

定義 4.2. $R = \mathbb{C}[x]$ または $\mathbb{R}[x]$ $(x = (x_1, \ldots, x_n))$ とする．

- 以下で定義する $(f_1(x), \ldots, f_m(x))$ を R の **イデアル** と呼ぶ：

  $$\begin{aligned}(f_1(x), \ldots, f_m(x)) &:= R\langle f_1(x), \ldots, f_m(x)\rangle \\ &= \left\{\sum\nolimits_i g_i(x)f_i(x) : g_i(x) \in R\right\}\end{aligned}$$

  ただし，R は，f_i の係数が $\mathbb{R}$ ならば $\mathbb{R}[x]$，$\mathbb{C}$ ならば $\mathbb{C}[x]$ とする．

- R のイデアル I に対して，$I \subsetneq J \subsetneq R$ となるイデアル J が存在しないならば，I は **極大イデアル** であるという．

- R のイデアル I に対して，部分集合

  $$[h] = \{h + f : f \in I\}$$

  を **剰余類** と呼び，h をその剰余類の **代表元** と呼ぶ．

- R のイデアル I に対して，

$$R/I = \{[h] : h \in I\}$$

とする．$[h], [k] \in R/I$ に対して，

$$[h] + [k] := [h + k], \quad [h][k] := [hk]$$

と定義すると，R/I は環となり，**剰余環** と呼ばれる．

4.2.2 複素零点定理

定理 4.3 (ヒルベルトの弱零点定理)．$f_1, \ldots, f_m \in \mathbb{C}[x]$ に対して，

$$f_1(x) = 0, \ldots, f_m(x) = 0 \text{ が } \mathbb{C} \text{ で解を持たない} \iff 1 \in (f_1(x), \ldots, f_m(x))$$

が成り立つ．

Proof. $I = (f_1, \ldots, f_m)$ とする．$1 \in I$ ならば，ある $g_i \in \mathbb{C}[x]$ が存在して，$1 = \sum_i g_i f_i$ と書ける．よって $f_i(x) = 0$ $(i = 1, \ldots, m)$ となる x が $\mathbb{C}$ に存在すれば矛盾である．

逆に $1 \notin I$ とする．すると I を含む極大イデアル $J \subsetneq \mathbb{C}[x]$ が存在する．このとき $\mathbb{C}[x]/J$ は体であり，かつ $\mathbb{C}$ の代数拡大になる．いま $\mathbb{C}$ は代数閉体であるので，$\mathbb{C}[x]/J = \mathbb{C}$．よって，$x_i$ の $\mathbb{C}[x]/J$ への像を a_i とおくと，$a_i \in \mathbb{C}$ となる．よって，$x_i - a_i \in J$ より $(x_1 - a_1, \ldots, x_n - a_n) \subset J$ となるが，$(x_1 - a_1, \ldots, x_n - a_n)$ は極大イデアルなので，$(x_1 - a_1, \ldots, x_n - a_n) = J$ となる．いま，$f_1, \ldots, f_n \in J$ より，ある $g_{i,j}$ が存在して，

$$f_i(x) = \sum_{j=1}^{n} g_{ij}(x)(x_j - a_j)$$

と書ける．よって，$a = (a_1, \ldots, a_n)$ に対して，$f_i(a) = 0$ $(i = 1, \ldots, m)$ となる． □

この定理より，ヒルベルトの零点定理が成り立つ．イデアル $I \in K[x]$ と部分集合 $V \subset K^n$ に対して，

$$\mathcal{V}(I) = \{x \in K^n : f(x) = 0, \forall f \in I\} \quad (I \text{ の } \textbf{零点集合})$$
$$\mathcal{I}(V) = \{f \in K[x] : f(x) = 0, \forall x \in V\} \quad (V \text{ の } \textbf{イデアル})$$
$$\sqrt{I} = \{f \in K[x] : \exists m \in \mathbb{N}, f^m \in I\} \quad (I \text{ の } \textbf{根基})$$

と定義する．

定理 4.4 (ヒルベルトの零点定理)．$\mathbb{C}[x]$ のイデアル $I = (f_1, \ldots, f_m)$ に対して，

$$\mathcal{I}(\mathcal{V}(I)) = \sqrt{I}$$

Proof. $h \in \sqrt{I}$ とすると，ある k について $h^k \in I$．よって，すべての $x \in \mathcal{V}(I)$ に対して $h(x)^k = 0$ より，$h(x) = 0$ なので，$h \in \mathcal{I}(\mathcal{V}(I))$ である．

逆に $h \in \mathcal{I}(\mathcal{V}(I))$ とする．すると，$\mathbb{C}^{n+1}$ 上で $f_1, \ldots, f_m, x_{n+1} \cdot h - 1$ は共通零点を持たない．弱零点定理より，ある $g_1, \ldots, g_{m+1} \in \mathbb{C}[x, x_{n+1}]$ が存在して，

$$1 = g_1 f_1 + \cdots + g_m f_m + g_{m+1}(x_{n+1} h - 1)$$

が成り立つ．$x_{n+1} = 1/h$ を代入すると，

$$1 = g_1(x, 1/h) f_1(x) + \cdots + g_m(x, 1/h) f_m(x)$$

となり，分母の h を払うと，

$$h(x)^k = h(x)^{k_1} g_1(x, 1) f_1(x) + \cdots + h(x)^{k_m} g_m(x, 1) f_m(x)$$

より，$h^k \in I$ を得る．よって，$h \in \sqrt{I}$ が成り立つ． □

4.2.3 実零点定理

一般の代数幾何では，実係数の多項式に対しても複素数解を主に考える．しかし，多項式の実数解に関する研究は，最適化問題を始め，応用上は非常に重要である．そのような研究は，**実代数幾何** と呼ばれ代数幾何の中でも，独自の発展を遂げている．

多項式系の実数における可解性の定理をいくつか紹介する．

4.2.3.1 零点が有限個の場合

まずは特殊な場合として，イデアルの零点集合が有限個で，不等式が一つだけの場合をヒルベルトの零点定理を用いて示す．

定理 4.5 (Parrilo [10])．$f(x), h_j(x) \in \mathbb{R}[x]$ $(j = 1, \ldots, m)$ に対して，$I = (h_1, \ldots, h_m) \in \mathbb{R}[x]$ とおく．$I = \sqrt{I}$ かつ，

$$\mathcal{V}_{\mathbb{C}}(I) := \{x \in \mathbb{C}^n \mid h_1(x) = 0, \ldots, h_m(x) = 0\} \quad \text{（複素数解）}$$

が空でなく有限集合であるとき，以下は同値である：

(1) $\nexists x \in \mathbb{R}^n,\ f(x) < 0,\ h_j(x) = 0\ (j = 1, \ldots, m)$

(2) $\exists a_j(x),\ d_k(x) \in \mathbb{R}[x]\ \ s.t.$

$$f(x) = \sum_k d_k(x)^2 + \sum_j a_j(x) h_j(x)$$

Proof. (2) を仮定する．すべての $x \in \mathcal{V}_{\mathbb{R}}(I)$ に対して，$f(x) = \sum_k d_k(x)^2$ より，$f(x) \geq 0$ となる．よって (1) が成り立つ．

(1) を仮定する．$V = \mathcal{V}_{\mathbb{C}}(I)$ とすると，$f(x) \geq 0,\ \forall x \in V \cap \mathbb{R}^n$ が成り立つ．V は有限集合なので，$v \in V$ に対して，$\widetilde{p}_v(v) = 1$，$\widetilde{p}_v(u) = 0, \forall u \in V \setminus \{v\}$ を満たす多項式 $\widetilde{p}_v(x)$ が存在する．実際，$i(u)$ を $u_i \neq v_i$ となる添字 i とすると，

$$\widetilde{p}_v(x) = \prod_{u \in V \setminus \{v\}} \frac{x_{i(u)} - u_{i(u)}}{v_{i(u)} - u_{i(u)}}$$

は条件を満たす．次に $v \in V \cap \mathbb{R}^n$ に対して $p_v := \mathrm{Re}(\widetilde{p}_v)$ とおく．さらに $V \cap \mathbb{C}^n = T \cup \bar{T}$ と分割し，$v \in T$ に対して，$p_{\bar{v}}(x) := \overline{\widetilde{p}_v}(x)$ とおき（係数だけ共役をとる），$p_v = \widetilde{p}_v$ とおく．こうおき換えても，$p_v(v) = 1$，$p_v(u) = 0, \forall u \in V \setminus \{v\}$ を満たすことは変わらない．ここで，$v \in T$ に対して，

$$q_v(x) := \begin{cases} \sqrt{f(v)}p_v(x) & (x \in V \cap \mathbb{R}^n) \\ \sqrt{f(v)}p_v(x) + \overline{\sqrt{f(v)}}p_{\bar{v}}(x) & (x \in V \cap \mathbb{C}^n) \end{cases}$$

とおく．すると $x \in V \cap \mathbb{C}^n$ のとき，$q_v(x) = \sqrt{f(v)}p_v(x) + \overline{\sqrt{f(v)}p_v}(x)$ なので，q_v は実係数多項式であり，$q_v(v) = \sqrt{f(v)}$ となる．したがって，$f(x) - \sum_{v \in (V \cap \mathbb{R}^n) \cup T} q_v(x)^2 = 0,\ \forall x \in V$ となり，ヒルベルトの零点定理より $f(x) - \sum_{v \in (V \cap \mathbb{R}^n) \cup T} q_v(x)^2 \in \sqrt{I}$ を得る．仮定より $\sqrt{I} = I$ なので，(2) が成り立つ． □

言い替えると，この定理の条件下では，$f(x)$ が $h_j(x)$ の零点上で非負多項式:

$$f(x) \geq 0,\ \forall x \in \{x \in \mathbb{R}^n \mid h_1(x) = 0, \ldots, h_m(x) = 0\}$$

ならば，$f(x) = \sum_k d_k(x)^2 + \sum_j a_j(x)h_j(x)$ と表現できる，ということを保証している．

よって，定理の条件を満たす（実行可能領域が有限集合）最適化問題に対して，

$$\begin{aligned} &\inf\ f(x) \text{ s.t. } h_j(x) = 0 \\ &= \sup\ r \text{ s.t. } f(x) - r \geq 0,\ h_j(x) = 0 \\ &= \sup\ r \text{ s.t. } f(x) - r = \sum_k d_k(x)^2 + \sum_j a_j(x)h_j(x). \end{aligned}$$

が成り立ち（すべて等号），最後の問題は，現れる多項式の次数を制限すれば，半正定値計画問題で書くことができる．具体例は後ほど説明する．

4.2.4 実零点定理

解の個数が無限個で等式だけからなる場合，実係数多項式の $\mathbb{R}^n$ における可解性は，以下のように，$\mathbb{C}^n$ の場合と大きく異なる：

定理 4.6 (弱形式の実零点定理)**.** $f_1(x), \ldots, f_m(x) \in \mathbb{R}[x]$ に対して，

$$\begin{aligned} &f_1(x) = 0, \ldots, f_m(x) = 0 \text{ が } \mathbb{R} \text{ に解を持たない} \\ &\qquad \Longleftrightarrow -1 \in \sum \mathbb{R}[x]^2 + (f_1(x), \ldots, f_m(x)) \end{aligned}$$

が成り立つ．ここで，$(f_1(x),\dots,f_m(x))$ は $\mathbb{R}[x]$ のイデアルであり，

$$\sum \mathbb{R}[x]^2 := \left\{ \sum\nolimits_i g_i^2 \mid g_i \in \mathbb{R}[x] \right\}$$

である．ただし，右辺の $\sum$ は有限和を表す．

実際，$x^2+1=0$ は $\mathbb{C}$ 上では解を持つが，$\mathbb{R}$ では解を持たない．よって，$I=(x^2+1)\subset\mathbb{R}[x]$ を考えると，$1\notin I$ だが，

$$-1 = x^2 + (-1)(x^2+1) \in \sum \mathbb{R}[x]^2 + (x^2+1)$$

となる．

解説. 証明の流れは，複素零点定理と比較しながら読み進めるとわかりやすい．$I=(f_1,\dots,f_m)\subset\mathbb{R}[x]$，$T=\sum\mathbb{R}[x]^2+I$ とおくと，T は preordering[3] となる．まず，$-1\in T$ のとき，$f_i(a)=0$ となる a が存在すれば，$-1=\sum_i g_i(a)^2$ となり矛盾．

$-1\notin T$ として，方程式が解を持つことを示す．いま I に付随する極小素イデアル I' に対して，$\mathbb{R}[x]/I'$ の商環 $\mathrm{fr}\,(\mathbb{R}[x]/I')$ は $\mathbb{R}$ の拡大体である．$-1\notin T$ より，T は，$\mathrm{fr}\,(\mathbb{R}[x]/I')$ の順序 $\gtrsim$（通常の順序集合を定義するもの）で，$\gtrsim$ の $\mathbb{R}$ への制限が $\mathbb{R}$ の順序 $\geq$ を与えるようなものに拡張される．f_j, x_i の $\mathrm{fr}\,(\mathbb{R}[x]/I')$ での像を，それぞれ $\bar{f}_j, a_i$ とおくと，$f_j, -f_j\in T$ より，$\bar{f}_j\simeq 0$ ($\bar{f}_j\gtrsim 0$ かつ $-\bar{f}_j\gtrsim 0$) である．さらに $\overline{f_j(x)}=\sum_i \bar{f}_{j,\alpha}\bar{x}_i^\alpha=\sum_i f_{j,\alpha}a_i^\alpha$ より，$f_j(a_1,\dots,a_n)\simeq 0\,(j=1,\dots,m)$ が成り立つので，$f_j(x)=0\,(j=1,\dots,m)$ は $\mathrm{fr}\,(\mathbb{R}[x]/I')$ に解 $a=(a_1,\dots,a_n)$ を持つ．ここで，$\mathbb{R}$ は実閉体[4]であるので，Tarski's Transfer Principle より，$f_j(x)=0\ (j=1,\dots,m)$ が $(\mathbb{R},\geq)$ の拡大順序体 $(\mathrm{fr}\,(\mathbb{R}[x]/I'),\gtrsim)$ に解を持つならば，$\mathbb{R}$ にも解を持つ．よって示された．

[3] 体の通常の順序と異なり，ある元と 0 との大小が必ずしも定まらない

[4] 中間値の定理が成り立つような順序体のこと

定理 4.7 (実零点定理). $\mathbb{R}[x]$ のイデアル $I=(f_1,\dots,f_m)$ に対して，

$$\mathcal{I}(\mathcal{V}_{\mathbb{R}}(I)) = \sqrt[R]{I} := \{f\in\mathbb{R}[x] : -f^{2m}\in\sum\mathbb{R}[x]^2+I\}$$

が成り立つ．$\sqrt[R]{I}$ を I の **実根基** と呼ぶ．

Proof. $h\in\sqrt[R]{I}$ とすると，ある $d_i, g_j\in\mathbb{R}[x]$ が存在して，$-h^{2k}=\sum_i d_i^2+\sum_j g_jf_j$ となる．すべての $x\in\mathcal{V}_{\mathbb{R}}(I)$ に対して，$-h(x)^{2k}=\sum_i d_i(x)^2$ より，$h(x)=d_i(x)=0$ となる．よって，$h\in\mathcal{I}(\mathcal{V}(I))$ である．

逆に $h\in\mathcal{I}(\mathcal{V}(I))$ とする．すると $\mathbb{R}^{n+1}$ 上で $f_1,\dots,f_m,x_{n+1}\cdot h-1$ は共通零点を持たない．実零点定理の弱形式より，ある $d_i, g_j\in\mathbb{R}[x,x_{n+1}]$ が存在して，

$$-1=\sum_i d_i^2+\sum_j g_jf_j+g_{m+1}(x_{n+1}h-1)$$

が成り立つ．$x_{n+1}=1/h$ を代入し，分母の h を両辺に h の偶数べきをかけることで払えば，

$$-h(x)^{2k}=\sum_i\left\{h(x)^{k_i}d_i(x,1)\right\}^2+\sum_j h^{2k_j}g_j(x,1)f_j(x)$$

を得る．よって，$-h^{2k}\in\sum\mathbb{R}[x]^2+I$ である． □

4.3　不等式系の解の存在定理

一般の不等式系に関する以下の定理を紹介する.

定理 4.8 (実零点定理の一般系 [2], [7]). $f_k(x), h_i(x), g_j(x) \in \mathbb{R}[x]$ に対して，以下は同値である

(1) 以下の不等式系が実数解を持たない；

$$\begin{cases} f_k(x) > 0, k = 1, \ldots, r, \\ g_i(x) \geq 0, i = 1, \ldots, t, \\ h_j(x) = 0, j = 1, \ldots, s. \end{cases}$$

(2) ある $u_k \in \mathbb{N}, a_i \in \mathbb{R}[x], \sigma_e, \tau_e \in \sum \mathbb{R}[x]^2$ が存在して，

$$\prod_k f_k^{2u_k} + \sum_{e \in \{0,1\}^r} \sigma_e f^e + \sum_{e \in \{0,1\}^t} \tau_e g^e + \sum_j a_j h_j = 0,$$

where $f^e = f_1^{e_1} \cdots f_r^{e_r}$

成り立つ.

複雑で分かりづらいので，式を少なくした以下の系を挙げる.

系 4.9. $f(x), h_j(x) \in \mathbb{R}[x]$ $(j = 1, \ldots, m)$ に対して，以下は同値である.

(1) $\nexists x \in \mathbb{R}^n,\ f(x) > 0,\ h_j(x) = 0,\ j = 1, \ldots, m$

(2) $\exists \ell \in \mathbb{N},\ a_j(x) \in \mathbb{R}[x],\ \sigma_0(x), \sigma_1(x) \in \sum \mathbb{R}[x]^2,$

$$f(x)^{2\ell} + \sigma_0(x) + \sigma_1(x) f(x) + \sum_j a_j(x) h_j(x) = 0$$

例 4.10.

$$f(x, y) = -x - 1 > 0,\ h(x, y) = x^2 + y^2 - 1 = 0$$

を考えると，この等式・不等式系は $\mathbb{R}$ に解を持たない．実際，$\ell = 2,\ a = -1,\ \sigma_0 = y^2,\ \sigma_1 = 2$ とすると，

$$\begin{aligned} & f^2 + y^2 + 2f - h \\ & = (-x - 1)^2 + y^2 + 2(-x - 1) + (-1)(x^2 + y^2 - 1) = 0 \end{aligned}$$

が成り立つ.

5　非負多項式の表現定理

多項式系の解が有限個の場合に，その解上での多項式の最小化問題を半正定値計画問題で書けることを示した．概略を振り返ると：

(1) $\inf_{x\in\mathbb{R}^n}\{f(x) : h_j(x) = 0\} = \sup\{r : f(x)-r \geq 0,\ \forall x \in \mathcal{V}_{\mathbb{R}^n}(h_1,\ldots,h_m)\}$ と書ける．

(2) 「$f(x) - r \geq 0,\ \forall x \in V$（非負多項式）」を調べるのは一般には難しい．

(3) しかし，V が有限集合ならば，「$f(x) - r = \sum_k d_k(x)^2 + \sum_j a_j(x)h_j(x)$（二乗和多項式）と書ける」ことと同値．

(4) 多項式が二乗和多項式であることは半正定値行列を用いて表現できる．

今節では多項式系の解が無限個の場合に，非負多項式の表現定理について考える．

5.1　半代数的集合上の最適化

$\mathbb{R}^n$ の部分集合 V が **半代数的集合** であるとは，多項式 g_i に対して，

$$V = \{x \in \mathbb{R}^n : g_i(x) \geq 0\}$$

と書けるときに言う．等式による制約を加えたい場合には，$h_i(x) \geq 0, -h_i(x) \geq 0$ を加えれば良い．

実行可能領域が半代数的集合の場合の多項式最適化問題を考える．

$$f_{\min} := \inf\{f(x) : g_i(x) \geq 0\}.$$

5.1.1　準備

この問題の制約式から，以下を定義する：

$$M = \left\{\sigma_0 + \sum_i \sigma_i g_i \mid \sigma_i \in \sum \mathbb{R}[x]^2\right\}$$

$$\begin{aligned} M_k &= \{M \text{ の要素で各項の次数} \leq 2k\} \\ &= \left\{\sigma_0 + \sum_i \sigma_i g_i + \sum_j a_j h_j \mid \sigma_i \in \sum \mathbb{R}[x]^2,\ a_j \in \mathbb{R}[x],\right. \\ &\qquad\qquad \left.\deg(a_j h_j),\ \deg\sigma_0,\ \deg(\sigma_i g_i) \leq 2k\right\} \end{aligned}$$

とおく．ここで，M は **二次加群**，M_k は **打切り二次加群** と呼ばれる．すると，明らかに

$$(*)\quad p(x) \in M \Longrightarrow p(x) \geq 0 \text{ on } S := \{x \in \mathbb{R}^n \mid g_i(x) \geq 0,\ h_j(x) = 0\}$$

が成り立つ．よって，

$$\begin{aligned} f_{\min} &= \sup \quad r \quad \text{s.t.} \quad f(x) - r \geq 0 \text{ on } S \\ &\geq \quad \sup \quad r \quad \text{s.t.} \quad f(x) - r \in M \\ &\geq f_k := \sup \quad r \quad \text{s.t.} \quad f(x) - r \in M_k. \end{aligned}$$

が成り立ち，最後の問題は半正定値計画問題である．このように多項式最適化問題を近似する問題を **二乗和緩和問題** と呼ぶ．

5.1.2 正値多項式の表現定理

それでは $(*)$ の逆は成り立つだろうか？
ここで，次の条件を必要とする．二次加群 M が，

$$\forall p(x) \in \mathbb{R}[x],\ \exists N \in \mathbb{N} \text{ such that } N \pm p(x) \in M$$

を満たすとき，M は **アルキメデス性** を持つという．[6], [13] これはそれほど制限的な条件にはならない．というのは，

$$M \text{ がアルキメデス性を持つ} \Longleftrightarrow \exists N \in \mathbb{N} \text{ s.t. } N - \sum_{i=1}^{n} x_i^2 \in M$$

が成り立つので，実行可能領域 S が有界であれば，制約式に，$N - \sum_{i=1}^{n} x_i^2$ を加えて，実行可能領域を不変のまま M にアルキメデス性を持たせることができる．

5.1.3 Putinar の定理

以下の定理では，上記の制約式によって定義された二次加群 M と実行可能領域 S を用いる．

定理 5.1 (Putinar [12]). *M がアルキメデス性を持つとする．もし，$p(x) \in \mathbb{R}[x]$ が S 上で，$p(x) > 0$ ならば，$p(x) \in M$;*

$$\exists \sigma_i(x) \in \mathbb{R}[x]^2,\ a_j(x) \in \mathbb{R}[x],$$
$$p(x) = \sigma_0(x) + \sum_i \sigma_i(x) g_i(x) + \sum_j a_j(x) h_j(x)$$

である．

Proof. (1) 実零点定理の弱形式と同じ議論で，一般に $K = \emptyset \ \Leftrightarrow\ -1 \in T$ が成り立つ．

(2) これは $f > 0 \text{ on } K \ \Leftrightarrow\ \exists p, q \in T \text{ s.t. } pf = 1 + q$ と同値

(3) アルキメデス性より，

(1) 実零点定理の弱形式と同じ議論で，アルキメデス性を用いると $K = \leftrightarrow -1 \in M$ が成り立つ．(Marshall 5.4.1)

(2) これより，$f > 0$ on $K \to f \in M$ が成り立つ．

□

Putinar の定理より，上記の $f_{\min}$ に続く式で，実際には一つ目の不等号が等号であることがわかる．さらに，以下が成り立つ．

定理 5.2 (Lasserre [5]). もし M がアルキメデス性を持つならば，$f_k \to f_{min}$, $(k \to \infty)$.

半正定値計画問題を解くことで f_k が求まる．k を大きくすると，問題が大きくなるが，f_k は極限では元問題の大域最適値に等しい．よって，二乗和緩和問題を用いて，多項式最適化問題の大域最適値を近似的に求めることが出来る

5.1.4 二乗和緩和問題の例

以下の最適化問題を考える．

$$\begin{aligned} f_{\min} &= \inf \quad f(x,y) \quad \text{s.t.} \quad g(x,y) \geq 0 \\ &= \inf \quad x+y \quad \text{s.t.} \quad 1-x^2-y^2 \geq 0. \end{aligned}$$

この問題に対して，$M = \{\sigma_0(x,y)+\sigma_1(x,y)(1-x^2-y^2) \mid \sigma_j(x,y) \in \sum \mathbb{R}[x,y]\}$ とおくと，M はアルキメデス性を持ち，

$$\begin{aligned} f_{\min} &= \sup \quad r \quad \text{s.t.} \quad f(x,y) - r \in M \\ &\geq f_1 = \sup \quad r \quad \text{s.t.} \quad f(x,y) - r \in M_1 \\ &= \sup \quad r \\ &\qquad \text{s.t.} \quad x+y-r = \begin{bmatrix} 1 & x & y \end{bmatrix} X_0 \begin{bmatrix} 1 \\ x \\ y \end{bmatrix} + X_1(1-x^2-y^2), \\ &\quad X_0 \succeq 0,\ X_1 \geq 0,\ X_0 \in \mathbb{S}^3,\ X_1 \in \mathbb{R} \end{aligned}$$

が成り立つ．ここで，$X_0 \succeq 0$ は X_0 が半正定値行列であることを表す．この問題が半正定値計画問題になることを，以下で示そう．対称行列の内積

$$\langle A, B \rangle = \sum_{i,j} A_{ij} B_{ij}$$

を用いると，

$$\begin{aligned} f_1 &= \sup \quad r \\ &\qquad \text{s.t.} \quad x+y-r = \langle X_0, \begin{bmatrix} 1 & x & y \\ x & x^2 & xy \\ y & xy & y^2 \end{bmatrix} \rangle + X_1(1-x^2-y^2), \\ &\quad X_0 \succeq 0,\ X_1 \geq 0,\ X_0 \in \mathbb{S}^3,\ X_1 \in \mathbb{R} \end{aligned}$$

を得る．現れた x, y を成分に持つ行列を以下のようにおき直す．

$$\begin{bmatrix} 1 & x & y \\ x & x^2 & xy \\ y & xy & y^2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} + x \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} + y \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$
$$+ xy \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix} + x^2 \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} + y^2 \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$= B_{00} + x\, B_{10} + y\, B_{01} + xy\, B_{11} + x^2\, B_{20} + xy\, B_{11} + y^2\, B_{02}.$$

ここで，B_{ij} は $(i,j), (j,i)$ 成分が 1 で，それ以外の成分が 0 であるような対称行列である．

すると，係数比較により，

$$\begin{aligned} f_1 = \sup \quad & r \\ \text{s.t.} \quad & \langle X_0, B_{00} \rangle + X_1 = -r, \\ & \langle X_0, B_{10} \rangle = 1,\ \langle X_0, B_{01} \rangle = 1,\ \langle X_0, B_{11} \rangle = 0, \\ & \langle X_0, B_{20} \rangle - X_1 = 0,\ \langle X_0, B_{02} \rangle - X_1 = 0, \\ & X_0 \succeq 0,\ X_1 \geq 0, \\ & X_0 \in \mathbb{S}^3, X_1 \in \mathbb{R}. \\ = \sup \quad & r \\ \text{s.t.} \quad & \begin{bmatrix} -X_1 - r & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} & X_1 & 0 \\ \frac{1}{2} & 0 & X_1 \end{bmatrix} \succeq 0, \\ & X_1 \geq 0 \end{aligned}$$

を得る．よって，1 次式が目的関数であり，「1 次式を成分に持つ行列が半正定値である」，という制約を持つ最適化問題に変形でき，これは半正定計画問題である．

5.2　モーメント問題と正値写像の表現定理

この問題の標準ラグランジュ双対は，

$$\begin{aligned} \inf \quad & \lambda_{01} + \lambda_{10} \\ \text{s.t.} \quad & 1 - \lambda_{20} - \lambda_{02} \geq 0, \\ & \begin{bmatrix} 1 & \lambda_{01} & \lambda_{10} \\ \lambda_{01} & \lambda_{20} & \lambda_{11} \\ \lambda_{10} & \lambda_{11} & \lambda_{02} \end{bmatrix} \succeq 0. \end{aligned}$$

となる．これは，モーメント問題と呼ばれる問題と関係する．

数列 $(\lambda_\alpha)_\alpha \subset \mathbb{R}$ と集合 S が与えられたとき，S 上の確率測度 μ を用いて，

$$\lambda_\alpha = \int x^\alpha \, d\mu$$

と書けるか？このような問題を**モーメント問題**と呼び，このようにかける列 $(\lambda_\alpha)_\alpha$ を S–**モーメント列**と呼ぶ; [6], [13].

5.2.1 正値写像の表現

モーメント問題は次のように定式化すると，数学的に扱いやすい．

S 上の任意の確率測度 μ に対して，$p(x)$ が S 上で $p(x) \geq 0$ ならば，$\int p(x)\, d\mu \geq 0$ となる．よって，$(\lambda_\alpha)_\alpha$ に対して，線形写像 $L : \mathbb{R}[x] \to \mathbb{R}$ を $L(x^\alpha) = \lambda$ で定義すると，

$$(\lambda_\alpha)_\alpha \text{ が } S\text{–モーメント列} \Longrightarrow L(1) = 1,\ L(p) \geq 0,\ \forall p(x) \geq 0 \text{ on } S$$

という S–モーメント列の必要条件を得る．ここで，線形写像 $L : \mathbb{R}[x] \to \mathbb{R}$ に対して，$\mathbb{R}[x]$ の基底 x^α における値を $L(x^\alpha) = \lambda_\alpha$ と定めると，

$$(\lambda_\alpha)_\alpha \Longleftrightarrow L : \mathbb{R}[x] \to \mathbb{R}, \text{線形}$$

という一対一対応がある．したがって，モーメント問題は，上記の必要条件を用いて，

$$\begin{cases} L : \mathbb{R}[x] \to \mathbb{R},\ \text{linear}, \\ L(1) = 1, \\ L(p) \geq 0,\ \forall p \geq 0 \text{ on } S \end{cases} \overset{?}{\Longrightarrow} \exists \mu \in \mathcal{M}^1(S),\ L(f) = \int f(x)\, d\mu$$

が成り立つかどうか，という問題が解ければ良い．ここで，$\mathcal{M}^1(S)$ は S 上の確率測度全体を表す．

5.2.2 半代数的集合と正値写像

集合 S を

$$S = \{x \in \mathbb{R}^n \mid g_i(x) \geq 0,\ h_j(x) = 0\}$$

で定義する．このように多項式の等式と不等式で定義された集合を **半代数的集合** と呼ぶ．またその制約式から生成される二次加群を

$$M = \left\{ \sigma_0 + \sum_i \sigma_i g_i + \sum_j a_j h_j \mid \sigma_i \in \sum \mathbb{R}[x]^2,\ a_j \in \mathbb{R}[x] \right\}$$

とする．このとき，$M \subset \{p \in \mathbb{R}[x] \mid p(x) \geq 0 \text{ on } S\}$ より，線形写像 $L : \mathbb{R}[x] \to \mathbb{R}$ に対して，

$$\begin{aligned} &L(1) = 1,\ L(p) \geq 0,\ \forall p \geq 0 \text{ on } S \\ \Longrightarrow\ &L(1) = 1,\ L(p) \geq 0,\ \forall p \in M \end{aligned}$$

が成り立つ．よって，

$$\begin{aligned}
&f_{\min} := \inf f(x) \text{ s.t. } x \in S \\
&= \inf \int f\, d\mu \text{ s.t. } \mu \in \mathcal{M}^1(S) \\
&\geq \inf\ L(f) \text{ s.t. } L:\ \text{linear},\ L(1) = 1,\ L(p) \geq 0, \forall p \geq 0 \text{ on } S \\
&\geq \inf\ L(f) \text{ s.t. } L:\ \text{linear},\ L(1) = 1,\ L(p) \geq 0, \forall p \in M \\
&\geq d_k := \inf\ L(f) \text{ s.t. } L:\ \text{linear},\ L(1) = 1,\ L(p) \geq 0, \forall p \in M_k
\end{aligned}$$

を得る．このように多項式最適化問題を近似する問題を **モーメント緩和問題** と呼ぶ．逆の命題については，以下が成り立つ．

定理 5.3 (Putinar [12])**.** M がアルキメデス性を持つとする．このとき，線形写像 $L : \mathbb{R}[x] \to \mathbb{R}$ に対して，

$$\begin{aligned}
&L(1) = 1,\ L(p) \geq 0,\ \forall p \in M \\
&\iff \exists \mu \in \mathcal{M}^1(S),\ L(p) = \int p\, d\mu
\end{aligned}$$

が成り立つ．

したがって，Putinar の定理より，以下を得る．

定理 5.4 (Lasserre [5])**.** M がアルキメデス性を持つならば，$d_k \to f_{\min}$，$(k \to \infty)$．

5.2.3 モーメント緩和問題の例

5.1.4 節の問題

$$\begin{aligned}
&\inf \quad x + y \\
&\text{s.t.} \quad 1 - x^2 - y^2 \geq 0
\end{aligned}$$

に対して，モーメント緩和問題を作ろう．いま，$S = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid 1 - x^2 - y^2 \geq 0\}$，$M = \{\sigma_0 + \sigma_1(1 - x^2 - y^2) \mid \sigma_0, \sigma_1 \in \sum \mathbb{R}[x, y]^2\}$ とする．前節の構成から，

$$\begin{aligned}
&\inf \quad x + y \quad \text{s.t.} \quad 1 - x^2 - y^2 \geq 0 \\
&= \inf \quad \int (x + y)\, d\mu \quad \text{s.t.} \quad \mu \in \mathcal{M}^1(S) \\
&\geq \inf \quad L(x + y) \\
&\quad \text{s.t.} \quad L:\ \text{linear},\ L(1) = 1,\ L(p) \geq 0, \forall p(x, y) \geq 0 \text{ on } S \\
&= \inf \quad L(x + y) \\
&\quad \text{s.t.} \quad L:\ \text{linear},\ L(1) = 1,\ L(p) \geq 0, \forall p \in M \\
&\geq \inf \quad L(x + y) \\
&\quad \text{s.t.} \quad L:\ \text{linear},\ L(1) = 1,\ L(p) \geq 0, \forall p \in M_k
\end{aligned}$$

を得る．ここで，

$$M_k = \{\sigma_0 + \sigma_1(1 - x^2 - y^2) \mid \sigma_0, \sigma_1 \in \sum \mathbb{R}[x, y]^2,\ \deg \sigma_0,\ \deg \sigma_1 + 2 \leq 2k\}$$

である．任意の $X_0 \in \mathbb{S}^3_+$, $X_1 \geq 0$ に対して，

$$q = \langle X_0, \begin{bmatrix} 1 & x & y \\ x & x^2 & xy \\ y & xy & y^2 \end{bmatrix} \rangle + X_1(1 - x^2 - y^2) \in M_1.$$

である．ここで，$L(x^\alpha) = \lambda_\alpha$ とすると，

$$L(q) = \langle X_0, \begin{bmatrix} 1 & \lambda_{01} & \lambda_{10} \\ \lambda_{01} & \lambda_{20} & \lambda_{11} \\ \lambda_{10} & \lambda_{11} & \lambda_{02} \end{bmatrix} \rangle + X_1(1 - \lambda_{20} - \lambda_{02}) \geq 0, \quad \forall X_0 \succeq 0,\ X_1 \geq 0.$$

を得る．これより，

$$\begin{bmatrix} 1 & \lambda_{01} & \lambda_{10} \\ \lambda_{01} & \lambda_{20} & \lambda_{11} \\ \lambda_{10} & \lambda_{11} & \lambda_{02} \end{bmatrix} \succeq 0, \quad 1 - \lambda_{20} - \lambda_{02} \geq 0$$

となる．よって，最後の問題は，

$$\begin{aligned} \inf \quad & \lambda_{10} + \lambda_{01} \\ \text{s.t.} \quad & 1 - \lambda_{20} - \lambda_{02} \geq 0, \\ & \begin{bmatrix} 1 & \lambda_{01} & \lambda_{10} \\ \lambda_{01} & \lambda_{20} & \lambda_{11} \\ \lambda_{10} & \lambda_{11} & \lambda_{02} \end{bmatrix} \succeq 0 \end{aligned}$$

となる．これは二乗和緩和問題の双対問題と等しい．

まとめ

以上のように，実代数幾何は最適化問題の様々な場面で現れ，そして最適化問題の様々な概念を捉え直すことができる．また，単に抽象化するのみならず，多項式最適化問題の大域最適解を求めるアルゴリズムを構築する等，最適化理論にとって強力な道具となり得る．近年の計算代数の発展によって，今後の最適化理論の発展においても，特にアルゴリズムそのものの構成やアルゴリズム的な理論を構築する際に，重要な手法を提供することが予想される．

6　最適化と代数幾何

等式のみを制約に持つ多項式最適化問題

$$\begin{aligned} \inf_{x\in\mathbb{R}^n} \quad & f(x) \\ \text{s.t} \quad & f_i(x)=0, \quad i=1,\dots,m \end{aligned} \tag{6.1}$$

を題材にして，最適化と代数幾何との関係をより深く調べていこう．以後 $m<n$（方程式の個数 $<$ 変数の次元）を仮定する．(5.1) の実行可能領域のように，多項式の零点で表せる集合を **代数的集合**，または **代数多様体** とよぶ[5]．

[5] 厳密には，明示的に多項式の零点で表せるものを代数的集合，代数的集合と環付き空間として同型になるものを代数多様体と呼ぶが，あまり気にしなくて良い．例えば，$\mathrm{GL}_2(\mathbb{C}) = \{A \in \mathbb{C}^{2\times 2} : \det(A)\neq 0\}$ は見かけ上，多項式の零点で書けないが代数多様体である

6.1　KKT 条件

以下は最適化問題の最適解が満たす基本的な条件である．

定理 6.1. $\bar{x}$ を (6.1) の最適解とする．$\nabla f_1(\bar{x}),\dots\nabla f_m$ が一次独立ならば，ある $\lambda_i\in\mathbb{R}$ が存在して，

$$\nabla f(\bar{x}) + \sum_{i=1}^{m} \lambda_i \nabla f_i(\bar{x}) = 0$$
$$f_1(\bar{x}) = \cdots = f_m(\bar{x}) = 0$$

が成り立つ．

結論の式が，(x,λ) 変数多項式の連立方程式になっていることに注意しよう．

6.2　最適値関数

次の例題を考える．

$$\begin{aligned} c = \min_{x,y\in\mathbb{R}} \quad & ax+by \\ \text{s.t.} \quad & x^4+y^4=1. \end{aligned}$$

ここで，a,b はパラメータで，最適値 c は a,b により決定される．多項式 x^4+y^4 は実行可能領域で非特異なので，KKT 条件より，最適解は

$$\begin{cases} a = 4\lambda x^3 \\ b = 4\lambda y^3 \\ x^4+y^4 = 1 \end{cases}$$

を満たす．この連立方程式に $c=ax+by$ を加えて，最適値 c を a,b を用いて表す．**グレブナー基底** を用いた **消去定理** より，この (x,y,λ,a,b) 変数連立方程式の成すイデアルから x,y,λ を消去すれば，求めたい関係式を得ることができる．数式処理ソフト `Macaulay 2` で，

```
R = QQ[x, y, L, a, b, c];
I = ideal( a - 4*L*x^3, b - 4*L*y^3, x^4 + y^4 - 1, c - a*x - b*y );
J = eliminate({x, y, L}, I);
```

とすると，イデアル J は (a,b,c) の多項式 $\Phi(a,b,c)$ 一つからなる：

$$\Phi(a,b,c) = c^{12} - 3c^8a^4 + 3c^4a^8 - a^{12} - 3c^8b^4 \\ - 21c^4a^4b^4 - 3a^8b^4 + 3c^4b^8 - 3a^4b^8 - b^{12}.$$

ここで $\Phi(a,b,c) = 0$ が求めたい関係式である．(a,b) に対して，この関係式を満たす c の一つが最適値である．多項式 $\Phi(a,b,c)$ は実行可能領域と最適化問題そのものの「複雑さ」に関する情報を持っている．そのような情報を調べて行こう．

6.2.1 代数多様体の共通部分

前節のように，最適値，最適解は連立方程式の解集合の一部になっている．連立方程式の解集合 $\mathcal{V}(f_1,\ldots,f_m) = \{x \in \mathbb{R}^n | f_1(x) = 0, \ldots f_m(x) = 0\}$ は，$\mathcal{V}(f_1),\ldots,\mathcal{V}(f_m)$ の共通部分になっているので，代数的多様体の共通部分の性質を調べることが重要になる．

6.2.1.1 曲線の共有点

$\mathbb{R}^2$ の二つの曲線の共有点を考えよう．例えば，円と直線の共有点は高々2点，円と楕円の共有点は高々 4 点である．直線は 1 次多項式，円と楕円は 2 次多項式で定義されることから類推されるように，d 次と d' 次の曲線の共有点は高々 dd' 個になるだろうか？むしろどうにかして

主張 $(*)$「d 次と d' 次の曲線の共有点は dd' 個である」

を成り立たせたい．単純に共有点の個数を数えたら成り立たないが，成り立つように以下のような工夫をする．

共通成分 共通成分を持っている場合，共有点は無限個になる．$x = 0$ と $xy = 0$ の共有点は $x = 0$ である．主張を成り立たせるには，共通成分を持たないとの仮定は必要である．

複素数解 実数解のみを考えると成り立たない．$y = x^2$ と $y = -1$ は実数解を持たないが，$(\pm i, -1)$ という複素数解を持ち，解の個数は期待する個数 2 である．よって，複素数解を考える．

射影空間 平行線は解を持たない．$x + y = 1$ と $x + y = -1$ が解を 1 つ持つには，射影空間を考える必要がある．

重複度 円と直線が接する場合には共有点は 1 つである．例えば，$x^2 + y^2 = 1$ と $y = 1$ の共有点を求める際，連立方程式は $x^2 = 0$ となり，$x = 0$ は 2 重根となる．このとき，共有点を 2 個と数えれば，主張 $(*)$ が成り立つ．

以上の考察を踏まえると，以下の定理の意味が見えてくる．

定理 6.2 (Bézout の定理)**.** C と C' を複素射影平面において，それぞれ次数が d と d' の多項式で定義された曲線で，共通成分を持たないものとする．このとき，C と C' の複素共有点の個数は重複度を込めて数えると，ちょうど dd' 個である．

Bézout の定理は他のバージョンも含めて，繰り返し用いる重要な定理である．証明はしないが，以下で定理を利用するために必要な射影空間などの概念を準備する．

7　代数幾何の基本概念

7.1　射影空間

体 K を $\mathbb{R}$ または $\mathbb{C}$ とする[6]．$a, b \in K^{n+1} \setminus \{0\}$ に対して，同値関係を

$$a \sim b \Longleftrightarrow a = \lambda b \quad （ある\ \lambda \in K \setminus \{0\}）$$

で定義したとき，$\mathbb{P}(K^{n+1}) := (K^{n+1} \setminus \{0\})/\sim$ を K 上の **射影空間** と呼ぶ．体 K を省略して $\mathbb{P}^n$ とも書く．射影空間と区別するため K^{n+1} を**アファイン空間** と呼ぶ．

[6] 基本的に $\mathbb{C}$ を扱うが，図形的に想像しやすいので，当面 $K = \mathbb{R}$ と考えておいたほうがよい．

例 7.1. $\mathbb{P}^2 = \mathbb{P}(\mathbb{R}^3)$ では，

(1) $\mathbb{P}^2$ の点 $\Longleftrightarrow$ $\mathbb{R}^3$ の原点を通る直線

(2) $\mathbb{P}^2$ の直線 $\Longleftrightarrow$ $\mathbb{R}^3$ の原点を通る平面

(3) $\mathbb{P}^2$ の曲線 $\Longleftrightarrow$ $\mathbb{R}^3$ の錐

という対応を持っている．$\mathbb{R}^3$ の錐とと $z = 1$（又は他の変数）との共通部分を取ることで $\mathbb{P}^2$ の図形イメージが得られる．$X \subset \mathbb{P}^2$ に対して，錐

$$\mathrm{Cone}(X) = \{\lambda(x, y, z) \in K^3 \mid (x : y : z) \in X,\ \lambda \in \mathbb{R}\}$$

が対応するアファイン空間の図形である．

ここで，$\mathbb{P}^2$ の元 p が同値類であることを強調するときは $p = (x : y : z)$ と書くが，単に代表元を用いて $p = (x, y, z)$ と書くことも多い．

7.1.1　斉次化と射影化

多項式 $f_j \in K[x]$ に対して，

$$X := \mathcal{V}_a(f_1, \ldots, f_n) = \{x \in K^n : f_1(x) = 0, \ldots, f_m(x) = 0\}$$

を，アファイン空間の集合であることを強調したいとき，**アファイン代数的集合（アファイン多様体）** と呼ぶ．$(n+1)$ 変数斉次多項式 $F_j(y_0, y_1, \ldots, y_n)$ に対して，

$$\mathcal{V}_p(F_1, \ldots, F_n) = \{y \in \mathbb{P}^n : F_1(y) = 0, \ldots, F_m(y) = 0\}$$

を **射影代数的集合（射影多様体）**と呼ぶ．ここで，定義多項式が斉次なので，$\tilde{f}_j$ の零点集合を定数倍したものも零点集合になり，射影空間の集合をうまく定義できる．斉次多項式によって生成されるイデアルを **斉次イデアル** と呼ぶ．混乱のないときは，$\mathcal{V}_a(f), \mathcal{V}_p(f)$ を単に $\mathcal{V}(f)$ と書く．

アファイン多様体 X の **射影化** を考える．$\deg f = d$ に対して，

$$f^\sharp(x_0, x_1, \ldots, x_n) := x_0^d f\left(\frac{x_1}{x_0}, \ldots, \frac{x_n}{x_0}\right) \text{（斉次化多項式）}$$

と定義する[7]．すると，$f^\sharp$ は $n+1$ 変数の斉次多項式になり，射影多様体

$$X^\sharp = \{(x_0, x) \in \mathbb{P}^n : f_1^\sharp(x_0, x) = 0, \ldots, f_m^\sharp(x_0, x) = 0\}$$

を定義する．

[7] $f = x_1x_2 + x_1 + 1$ のとき，$f^\sharp = x_1x_2 + x_0x_1 + x_0^2$

射影代数多様体の例：グラスマン多様体

K を $\mathbb{C}^4$ の 2 次元部分空間とする．K の基底を $a = (a_1, a_2, a_3, a_4)$, $b = (b_1, b_2, b_3, b_4) \in \mathbb{C}^4$ とすると，

$$x \in K \;\Leftrightarrow\; \operatorname{rank} \begin{pmatrix} a_1 & b_1 & x_1 \\ a_2 & b_2 & x_2 \\ a_3 & b_3 & x_3 \\ a_4 & b_4 & x_4 \end{pmatrix} = 2$$

より，$x \in K$ は (x, a, b) のすべての 3×3 小行列式が 0 になることと同値である．ここで，**外積代数** $a \wedge b$（$(a, b) \mapsto a \wedge b$ が双線形で，$a \wedge a = 0$，特に $a \wedge b = -a \wedge b$）を用いる．$\mathbb{C}^4$ の標準基底 e_i に対して，

$$\begin{aligned} a \wedge b &= (a_1e_1 + a_2e_2 + a_3e_3 + a_4e_4) \wedge (b_1e_1 + b_2e_2 + b_3e_3 + b_4e_4) \\ &= \begin{vmatrix} a_1 & b_1 \\ a_2 & b_2 \end{vmatrix} e_1 \wedge e_2 + \begin{vmatrix} a_1 & b_1 \\ a_3 & b_3 \end{vmatrix} e_1 \wedge e_3 + \begin{vmatrix} a_1 & b_1 \\ a_4 & b_4 \end{vmatrix} e_1 \wedge e_4 \\ &\quad + \begin{vmatrix} a_2 & b_2 \\ a_3 & b_3 \end{vmatrix} e_2 \wedge e_3 + \begin{vmatrix} a_2 & b_2 \\ a_4 & b_4 \end{vmatrix} e_2 \wedge e_4 + \begin{vmatrix} a_3 & b_3 \\ a_4 & b_4 \end{vmatrix} e_3 \wedge e_4, \end{aligned}$$

さらに

$$a \wedge b \wedge x = (a \wedge b) \wedge (x_1e_1 + x_2e_2 + x_3e_3 + x_4e_4)$$

を展開するか，直接

$$\begin{aligned} a \wedge b \wedge x &= \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ a_3 \\ a_4 \end{pmatrix} \wedge \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ b_3 \\ b_4 \end{pmatrix} \wedge \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{pmatrix} \\ &= \begin{vmatrix} a_1 & b_1 & x_1 \\ a_2 & b_2 & x_2 \\ a_3 & b_3 & x_3 \end{vmatrix} e_1 \wedge e_2 \wedge e_3 + \begin{vmatrix} a_1 & b_1 & x_1 \\ a_2 & b_2 & x_2 \\ a_4 & b_4 & x_4 \end{vmatrix} e_1 \wedge e_2 \wedge e_4 \\ &\quad + \begin{vmatrix} a_1 & b_1 & x_1 \\ a_3 & b_3 & x_3 \\ a_4 & b_4 & x_4 \end{vmatrix} e_1 \wedge e_3 \wedge e_4 + \begin{vmatrix} a_2 & b_2 & x_2 \\ a_3 & b_3 & x_3 \\ a_4 & b_4 & x_4 \end{vmatrix} e_2 \wedge e_3 \wedge e_4 \end{aligned}$$

と計算すれば，

「行列 (x, a, b) のすべての 3×3 小行列式が 0」$\Leftrightarrow a \wedge b \wedge x = 0$

と書くことができる．また，他の基底を a', b' とすると，正則行列 P に関して，

$$\begin{pmatrix} a'_1 & b'_1 \\ a'_2 & b'_2 \\ a'_3 & b'_3 \\ a'_4 & b'_4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_1 & b_1 \\ a_2 & b_2 \\ a_3 & b_3 \\ a_4 & b_4 \end{pmatrix} P$$

と書けるので，$a' \wedge b' = (\det P)(a \wedge b)$ と書ける．したがって，以下の写像を定義する:

$$\begin{array}{rccc} \varphi : & \{K \subset \mathbb{C}^4 : K \text{ は 2 次元線型空間}\} & \to & \mathbb{P}^5 \\ & K & \mapsto & a \wedge b \end{array},$$

ここで，a, b は K の基底の一つである．すると，φ は基底の取り方によらないので良定義で，単射である．さらに

$$\operatorname{Im}\varphi = \{(u_{12}, u_{13}, u_{14}, u_{23}, u_{24}, u_{34}) \in \mathbb{P}^5 : u_{12}u_{34} - u_{13}u_{24} + u_{23}u_{14} = 0\}$$

と書けるので，$\operatorname{Im}\varphi$ は $\mathbb{P}^5$ の射影代数多様体である．一般に C^n の r 次元部分空間を射影代数多様体と見なしたものを**グラスマン多様体** と呼び，$G(r, n)$ と書く．

7.2 位相

アファイン空間 K^n の部分集合 X に対して，

$$X \text{ が閉集合} \iff X \text{ がアファイン代数的集合}$$

で閉集合を決め，K^n の位相を定義する．この位相を K^n の**ザリスキー位相** と呼ぶ．例えば，多項式 $f \in K[x]$ に対して，$D(f) := \{x \in K^n : f(x) \neq 0\}$ はとすると，$\{D(f)\}_{f \in K[x]}$ は K^n のザリスキー位相の開基底になる．

射影空間 $\mathbb{P}^n$ の部分集合 Y に対しては，

$$Y \text{ が閉集合} \iff Y \text{ が射影代数的集合}$$

によって $\mathbb{P}^n$ の位相を定める．$Y = \mathcal{V}_p(F_1, \ldots, F_m)$ とし，

$$F^\flat(x_0, x_1, \ldots, x_n) = F(1, x_1, \ldots, x_n) \text{（非斉次化多項式）}$$

と定義する [8]．いま，$a \in \mathbb{P}^n$ に対して，

$$F_j(a) = 0 \text{ かつ } a_0 \neq 0 \iff F_j(1, a_1, \ldots, a_n) = 0 \text{ かつ } a = (1 : a_1 : \cdots : a_n)$$

より，$D^+(y_0) = \{y \in \mathbb{P}^n : y_0 \neq 0\}$ とおくと，

$$\begin{array}{rcl} \varphi : \mathcal{V}_p(F_1, \ldots, F_n) \cap D^+(y_0) & \longrightarrow & \mathcal{V}_a(F_1^\flat, \ldots, F_n^\flat) \\ (y_0, y_1, \ldots, y_n) & \longmapsto & (y_1/y_0, \ldots, y_n/y_0) \end{array}$$

[8] $(f^\sharp)^\flat = f$ だが，斉次多項式 F に対して $(F^\flat)^\sharp = y_0^{-r}F$（$r$ は F/y_0^r が多項式になるような最大の整数）である．例えば $F = y_0^2 y_1 + y_0^3$ のとき，$(F^\flat)^\sharp = y_1 + y_0$.

は同型写像になる[9]よって，$U_i = Y \cap D^+(y_i)$ とすると，$\{U_i\}_{i=1}^n$ は Y の開被覆（$Y = \bigcup_{i=1}^n U_i$）となり，$i = 1, \ldots, n$

$$U_i \cong \text{ アファイン代数多様体}$$

を得る．したがって，

射影代数多様体はアファイン代数多様体の貼り合わせ

である．よって，局所的な概念はアファイン代数多様体に対して

特に，

$$\mathbb{P}^n \cap D^+(y_0) \cong K^n$$

である．この $\mathbb{P}^n$ の位相もザリスキー位相と呼ぶ.

部分集合には相対位相を入れる．特に断らない限り，$K^n, \mathbb{P}^n$ は，ザリスキー位相をいれた位相空間を表す.

[9] 正確な定義は環付き空間として同型ということ．大まかに言うと，位相空間として同相で，それぞれの環で作る有理関数を，有理関数に写すような写像である．

7.3 既約性

多項式の因数分解可能性と幾何的な対応を持つのが多様体の既約性である.

位相空間 X に対して，以下の同値な条件のいずれかが成り立つとき，X は **既約** であるという[10]：

(1) 閉集合 V_1, V_2 に対して，$X = V_1 \cup V_2$ ならば， $V_1 = X$ または $V_2 = X$

(2) 開集合 U_1, U_2 に対して，$U_1 \cap U_2 = \emptyset$ ならば，$U_1 = \emptyset$ または $U_2 = \emptyset$

(3) 任意の空でない開集合は稠密である.

[10] ザリスキー位相をイメージしないといけない．通常の位相空間は，ほとんど既約にならない.

例 7.2. 以下，ザリスキー位相を入れた K^n を考える.

(1) $X = \mathcal{V}(xy) = \mathcal{V}(x) \cup \mathcal{V}(y)$ より，X は既約でない（X は x 軸と y 軸）.

(2) $X = \mathcal{V}(x^2 + y^2 - 1)$ は既約である．$x^2 + y^2 - 1$ が $\mathbb{C}$ で因数分解できないこと（既約）より従う.

定理 7.3. K^n の代数的集合 X に対して[11]，

$$X \text{ は既約} \iff \mathcal{I}(X) \text{ は素イデアル} \iff K[x]/\mathcal{I}(X) \text{ は整域}$$

が成り立つ.

[11] I が素イデアル $\Leftrightarrow fg \in I$ ならば $f \in I$ または $g \in I$. 環 R が整域 $\Leftrightarrow fg = 0$ ならば $f = 0$ または $g = 0$.

練習問題 7.4. 定理 7.3 を証明せよ.

例 7.5. (0) は $\mathbb{C}[x]$ の素イデアルなので，定理より $\mathbb{C}^n, \mathbb{P}^n$ は既約である.

定理 7.6. アファイン代数多様体 X に対して，有限個の既約なアファイン代数多様体 X_i が存在して，$X = X_1 \cup \ldots \cup X_r$ と書ける．この分解を X の **既約分解**，X_i を **既約成分** と呼ぶ.

解説. イデアルの準素イデアル分解より従う.

7.4 次元

次元は多様体の幾何的なイメージを与えるだけでなく，様々な議論の中で繰り返し用いられる．しかし，線形代数や可微分多様体のようにわかり易くはない．

位相空間 X に対して[12]，空でない既約閉集合の上昇列

$$X_0 \subsetneq X_1 \subsetneq \cdots \subsetneq X_d \subset X$$

を考え[13]，このような d の最大値を X の **次元** と呼び，$\dim X$ と書く．

[12] やはりザリスキー位相を入れたものを念頭に考える．

[13] X が既約であれば，$X_d = X$．

例 7.7. $X = \mathbb{C}^3$ とする．$\{0\} \subsetneq \{(x,y,z) : x = 0, y = 0\} \subsetneq \{(x,y,z) : x = 0\} \subsetneq \mathbb{C}^3$ より，$\dim \mathbb{C}^3 \geq 3$ である．追加の議論より $\dim \mathbb{C}^3 = 3$ となる．

同様に一点集合，直線，平面の次元はそれぞれ $0, 1, 2$ となる．一般にアファイン線形空間に対して，今節で定義した次元は線形空間の次元と一致する．

定理 7.8. アファイン代数多様体 X に対して，$X = \bigcup X_i$ と既約分解されたとする．このとき，$\dim X = \max_i \dim X_i$ が成り立つ．

解説. $\dim X \geq \max_i \dim X_i$ は自明である．等号は背理法で示される．

定理 7.9. アファイン代数多様体 X に対して，$I = \mathcal{I}(X)$ とする．素イデアルの上昇列 $I_0 \subsetneq I_1 \subsetneq \cdots \subsetneq I_d \subsetneq K[x]/I$ を考え，このような d の最大値を $\mathbb{C}[x]/I$ のクルル次元と呼び $\dim(K[x]/I)$ と書く．このとき，

$$\dim X = \dim(K[x]/I).$$

解説.

$$\{X \text{ の既約部分多様体}\} \quad \underset{\mathcal{V}}{\overset{\mathcal{I}}{\rightleftarrows}} \quad \{K[x]/I \text{ の素イデアル}\}$$

が一対一の対応になっており，X が既約の場合は，

$$X_0 \subsetneq X_1 \subsetneq \cdots \subsetneq X_d = X \Longleftrightarrow \mathcal{I}(X_0) \supsetneq \mathcal{I}(X_1) \supsetneq \cdots \supsetneq \mathcal{I}(X_d) = (0)$$

となることから従う．

定理 7.10. X を既約なアファインまたは射影代数多様体とし，U を X の空でない開集合とする．このとき，$\dim X = \dim U$ である．

解説. U は X で稠密なので，成り立ちそうである．厳密に示すには環論の準備が必要なので省略する．

例 7.11. $\mathbb{P}^n \cap D^+(f) \cong \mathbb{C}^n$ より，$\dim \mathbb{P}^n = n$ である．

定理 7.12 (クルルの単項イデアル定理)**.** X をアファイン代数多様体で，任意の既約成分の次元が $\dim X$ に等しいものとする．$f \in K[x]/\mathcal{I}(X)$ が，単元でも零因子[14]でもないならば，$X \cap \mathcal{V}(f)$ の任意の既約成分の次元は $\dim(X \cap \mathcal{V}(f)) = \dim X - 1$ となる．

[14] $f \in A$ が単元 $\Leftrightarrow \exists g \in A, fg = 1$.
$f \in A$ が零因子 $\Leftrightarrow \exists g \in A, fg = 0$.

解説. この定理は代数多様体の次元理論の基本定理である．連立方程式に対して，適当な方程式を一つ増やせば解集合の次元が一つ減少する，という原理を正確に述べたものである．証明は純粋に環論的なものであり簡単ではない．

定理において，任意の既約成分の次元が $\dim X$ に等しいという仮定は必要である．以下の解説においては，線型空間とその平行移動の次元は，ベクトル空間の次元と同等ともものと考えて欲しい．例えば，$\mathbb{C}^3$ の多様体 $X = \mathcal{V}(x) \cup \mathcal{V}(y,z)$ を考えると $\dim X = \max\{2,1\} = 2$ である．いま $I := \mathcal{I}(X) = (xy, xz)$ となり，$x-1 \in \mathbb{C}[x]/I$ は単元でも零因子でもない．しかし，$X \cap \mathcal{V}(x-1) = \{(1,0,0)\}$ より，$\dim(X \cap \mathcal{V}(x-1)) = 0 < \dim X - 1$ である．

f が $\mathbb{C}[x]/\mathcal{I}(X)$ の単元であることと $X \cap \mathcal{V}(f) = \emptyset$，零因子であることと $\mathcal{V}(f)$ が X の既約成分を含むことは同値である．

この次元の定義では，通常の可微分多様体などの次元との関係がイメージしにくいが，次の節でその関係を説明する．

7.5 接空間

以後，$K = \mathbb{C}$ の場合で考える．例で $\mathbb{R}$ を扱う場合があるが，その場合は $\mathbb{R}$ でも成り立つ場合を考えていると解釈してほしい．幾何的なイメージは $\mathbb{R}^n$ で考えたほうが良い．

アファイン代数多様体 $X \subset \mathbb{C}^n$ に対して，$\mathcal{I}(X) = (f_1, \dots, f_m)$ とする．このとき，

$$T_a X = \ker \frac{\partial(f_1, \dots, f_m)}{\partial(x_1, \dots, x_n)}(a) = \{x \in \mathbb{C}^n : \nabla f_j(a) x = 0,\ j = 1, \dots, m\}$$

を **接空間** と呼ぶ[15]．このとき以下が成り立つ．

定理 7.13. 既約なアファイン代数多様体 $X \subset \mathbb{C}^n$ に対して，

(1) $\dim X \leq \dim T_a X,\ \forall a \in X$[16]

(2) 空でない開集合 $U \subset X$ が存在して，
$\dim X = \dim T_a X,\ \forall a \in U$[17]

解説. f を零多項式でも定数多項式でもない $C[x]$ の既約多項式[18]とする．$X = \mathcal{V}(f)$（$\mathbb{C}^n$ の超曲面）の場合に定理を示す．クルルの単項イデアル定理より，$\dim X = n-1$ となる．一方，$a \in X$ に対して，$\operatorname{rank} \nabla f(a) \leq 1$ より，$\dim T_a X = \dim \ker \nabla f(a) = n - \operatorname{rank} \nabla f(a) \geq n-1 = \dim X$ である．したがって (1) が示された．次に，f は定数多項式でないので，$\nabla f(x)$ は恒等的に零ではない．よって，$V = \{x \in \mathbb{C}^n : \operatorname{rank} \nabla f(x) = 0\} = \{x \in \mathbb{C}^n : \frac{\partial}{\partial x_i} f(x) = 0, i = 1, \dots, n\}$ は，$\mathbb{C}^n$ に真に含まれるザリスキー閉集合である．したがって，$U = V^c$ 上で，$\dim X = \dim T_x X$ となる．

X が一般の既約なアファイン代数多様体のときは，X がある既約なアファイン超曲面に双有理同型[19]になること，多様体の次元が開部分集合の次元と等しいこと，$a \mapsto \dim T_a X$ が上半連続関数であることから従う．

[15] a を含むように並行移動したもので定義する場合もある．

[16] $\dim T_a X$ はベクトル空間としての次元だが，結果的に一致する．

[17] ザリスキー位相では既約多様体の任意の開集合は稠密なので，ほとんどの点で等号がなりたつということ．

[18] f が因数分解出来ないこと

[19] 既約な代数多様体 X と Y が双有理であるとは，X と Y の空でない開集合同士が同型になることである．

7.6 非特異性

既約なアファイン代数多様体 X に対して，$\dim X < \dim T_a X$ となる $a \in X$ を X の **特異点**，$\dim X = \dim T_a X$ となる点 $a \in X$ を **非特異点** と呼ぶ．非特異点のみからなるとき，その多様体を **非特異** であるという．

$X \subset \mathbb{C}^n$ に対して $\operatorname{codim} X = n - \dim X$ を X の余次元と呼ぶ．

定理 7.14. (1) 既約なアファイン代数多様体 $X = \mathcal{V}_a(f_1, \ldots, f_m) \subset \mathbb{C}^n$ に対して，

$$a \in X \text{ が非特異点} \iff \operatorname{rank} \frac{\partial(f_1, \ldots, f_m)}{\partial(x_1, \ldots, x_0)}(a) = \operatorname{codim} X$$

(2) 既約な射影代数多様体 $Y = \mathcal{V}_p(F_1, \ldots, F_m) \subset \mathbb{P}^n$（$F_j$ は斉次）に対して，

$$a \in Y \text{ が非特異点} \iff \operatorname{rank} \frac{\partial(F_1, \ldots, F_m)}{\partial(y_0, y_1, \ldots, y_0)}(a) = \operatorname{codim} X$$

解説. (1) は非特異点の定義より自明である．(2) で変数の数が一つ多いにもかかわらず条件式の右辺が変わらないのは，斉次多項式 F_i に対するオイラーの公式：

$$(\deg F_j) F_j(y) = \sum_{i=0}^{n} y_i \frac{\partial F_j}{\partial y_i}$$

から得られる式

$$y_0 \frac{\partial F_j}{\partial y_0} = (\deg F_j) F_j(y) - \sum_{i=1}^{n} y_i \frac{\partial F_j}{\partial y_i}$$

より，$a \in Y \cap D^+(y_0)$ において，$\frac{\partial(F_1, \ldots, F_m)}{\partial(y_0, y_1, \ldots, y_0)}(a)$ の 1 列は他の列の一次結合で表せるからである．

7.7 Genericity

問題を扱う際には,「generic」な場合に次数に関する厳密な公式を得て，特殊な場合に上界を求める場合が多い．

次数 d の **generic** な多項式 $f(x) = \sum_{|\alpha| \le d} f_\alpha x^\alpha$ に対して，性質 A が成り立つとは，係数 $\boldsymbol{f} = (f_\alpha)_{|\alpha| \le d}$ を $\mathbb{C}^N$ 内の点と見たとき，$\mathbb{C}^N$ のあるザリスキー開集合上の $\boldsymbol{f}$ に対して，$f(x)$ が性質 A を持つということである．このような性質 A を **generic な性質** と呼ぶ．

ザリスキー開集合は代数的集合の補集合なので，generic な性質が成り立たない f の集合はルベーグ測度 0 である．多項式が複数の場合も，係数をなんからのアファイン空間内の点とみなす．アファイン空間 $\mathbb{C}^N$ の代わりに射影空間 $\mathbb{P}^N$ 内の点とみなす場合もある．次数ではなく，何らかの性質を共有する多項式の集まりを考える場合もある．また，期待する性質によって generic な多項式に対応するザリスキー開集合は変わるが，開集合の共通部分は開集合なので，複数の generic な性質を同時に課しても，generic な性質である．

例 7.15. Generic な 2 次多項式 $f(x) = ax^2 + bx + c$ $(a \neq 0)$ は零点を 2 つ持つ．実際，対応するザリスキー開集合は $\mathbb{C}^3 \setminus \mathcal{V}(b^2 - 4ac)$ である．

8　多項式最適化問題の代数幾何

多項式最適化問題に戻る．

$$(\mathcal{P}) \quad \inf_{x\in\mathbb{R}^n} \quad f_0(x)$$
$$\text{s.t} \quad f_i(x)=0, \quad i=1,\dots,m$$

$\mathbb{R}^n$ を $\mathbb{C}^n$ の部分集合と考え，$\mathbb{C}^n$ 上の性質を考える．

8.1　Generic な多項式最適化問題

以下の定理は，多項式最適化問題の generic な性質を示す．証明では，線で囲った定理以外は，基本的な線形代数と多項式の微分のみを用いる．代数幾何の基本的な定理の使用法を紹介したのち，それらの証明を行う．

定理 8.1. 問題 $(\mathcal{P})$ を考える．*generic* な $f_0,f_1,\dots,f_n$ に対して，

(1) $V=\mathcal{V}_a(f_1,\dots,f_n)=\{x\in\mathbb{C}^n : f_1(x)=\cdots=f_m(x)=0\}$ は非特異である．

(2) すべての最適解において，KKT 条件が成り立つ．

(3) KKT 条件を満たす実行可能解の集合

$$K=\{x\in V : \text{ある } \lambda_1,\dots,\lambda_m \text{ が存在して,} \nabla f_0(x)+\sum_{i=1}^m \lambda_i\nabla f_i(x)=0\}$$

は有限集合である．

Proof. 斉次多項式 $F_j(x_0,x_1,\dots,x_n)=f_j^\sharp(x_1,\dots,x_n)$ とおく．

(1) $f_1,\dots,f_m$ が generic なとき，$F_1,\dots,F_m$ も generic である．よって，

定理 8.14

$X\subset\mathbb{P}^n$ を射影多様体とすると，generic な斉次多項式 F に対して，$X\cap\mathcal{V}(F)$ は $\dim X-1$ 次元の非特異な多様体である．

を繰り返し使うことにより

$$V^\sharp=\{\widetilde{x}=(x_0,x_1,\dots,x_n)\in\mathbb{P}^n : F_1(\widetilde{x})=\cdots F_m(\widetilde{x})=0\}$$

は 余次元 m の非特異な多様体である．よって，

$$\frac{\partial(F_1,\dots,F_m)}{\partial(x_0,x_1,\dots,x_n)}(\widetilde{x})=\begin{pmatrix} \frac{\partial F_1}{\partial x_0}(\widetilde{x}) & \frac{\partial F_1}{\partial x_1}(\widetilde{x}) & \dots & \frac{\partial F_1}{\partial x_n}(\widetilde{x}) \\ \vdots & & & \\ \frac{\partial F_m}{\partial x_0}(\widetilde{x}) & \frac{\partial F_m}{\partial x_1}(\widetilde{x}) & \dots & \frac{\partial F_m}{\partial x_n}(\widetilde{x}) \end{pmatrix}$$

の階数は m である．任意の $\widetilde{x}\in V^\sharp\cap D^+(x_0)\cong V$[20] に対して，オイラーの公

[20] $D^+(x_0)=\{\widetilde{x}\in\mathbb{P}^n : x_0\neq 0\}$

式より，

$$x_0\frac{\partial F_j}{\partial x_0}(\widetilde{x}) = (\deg F_j)F(\widetilde{x}) - \sum_{i=1}^{n} x_i\frac{\partial F_j}{\partial x_i}(\widetilde{x}) = -\sum_{i=1}^{n} x_i\frac{\partial F_j}{\partial x_i}(\widetilde{x})\ (j=1,\ldots,m)$$

なので，$\frac{\partial(F_1,\ldots,F_m)}{\partial(x_0,x_1,\ldots,x_n)}(\widetilde{x})$ の 1 列は他の列の一次結合でかける．したがって，$\frac{\partial(F_1,\ldots,F_m)}{\partial(x_1,\ldots,x_n)}(\widetilde{x})$ の階数も m である．任意の $x \in V$ に対して，

$$\frac{\partial F_j}{\partial x_i}(x_0,x_1,\ldots,x_n) = x_0^{d-1}\frac{\partial f}{\partial x_i}\left(\frac{x_1}{x_0},\ldots,\frac{x_n}{x_0}\right)\ (i=1,\ldots,n)$$

より，$\frac{\partial F_j}{\partial x_i}(1,x) = \frac{\partial f_j}{\partial x_i}(x)$ が成り立つ．したがって，$\frac{\partial(f_1,\ldots,f_m)}{\partial(x_1,\ldots,x_n)}(x)$ の階数も m となり，V は非特異である．

(2) $\frac{\partial(f_1,\ldots,f_m)}{\partial(x_1,\ldots,x_n)}(x)$ の階数が m のとき，$\nabla f_1(x),\ldots,\nabla f_m(x)$ は 1 次独立なので，KKT 条件が成り立つ．

(3) (1) より，任意の $\widetilde{x} \in V^\sharp$ に対して，$\nabla F_1(\widetilde{x}),\ldots,\nabla F_m(\widetilde{x})$ は一次独立であり，$x \in V$ に対して，$\nabla f_1(x),\ldots,\nabla f_m(x)$ は一次独立である．よって，

$$x \in K \Longleftrightarrow \operatorname{rank}\frac{\partial(f_0,f_1,\ldots,f_m)}{\partial(x_1,\ldots,x_n)}(x) \leq m$$

より，

$$K = \left\{x \in V : \frac{\partial(f_0,f_1,\ldots,f_m)}{\partial(x_1,\ldots,x_n)}(x) \text{ のすべての } (m+1)\times(m+1) \text{ 小行列式 } = 0\right\}$$

が成り立つ．いま，$F_0(\widetilde{x}) := f^\sharp(\widetilde{x})$，

$$K^\sharp := \{\widetilde{x} \in V^\sharp : \text{ある } (\lambda_0,\lambda_1,\ldots,\lambda_m) \in \mathbb{P}^m \text{ が存在して，} \ \lambda_0\nabla F_0(x) + \sum_{i=1}^{m}\lambda_i\nabla F_i(x) = 0\}$$

とすると，オイラーの公式より，$\operatorname{rank}\frac{\partial(F_0,F_1,\ldots,F_m)}{\partial(x_0,x_1,\ldots,x_n)}(\widetilde{x}) = \operatorname{rank}\frac{\partial(F_0,F_1,\ldots,F_m)}{\partial(x_1,\ldots,x_n)}(\widetilde{x})$ なので，

$$D^m := \left\{\widetilde{x} \in \mathbb{P}^n : \frac{\partial(F_0,F_1,\ldots,F_m)}{\partial(x_1,\ldots,x_n)}(\widetilde{x}) \text{ のすべての } (m+1)\times(m+1) \text{ 小行列式 } = 0\right\}$$

に対して，$K^\sharp = V^\sharp \cap D^m$ が成り立つ．よって，generic な f_0 に対して，$K^\sharp$ が有限個であることを示せば，$K = K^\sharp \cap D^+(x_0)$ も有限個であることが示される．

いま，generic な f_0 に対して，$V^\sharp \cap \mathcal{V}(F_0)$ は余次元 $m+1$ の非特異な多様体である．しかし，その多様体上では $\operatorname{rank}\frac{\partial(F_0,F_1,\ldots,F_m)}{\partial(x_0,x_1,\ldots,x_n)}(\widetilde{x}) = m+1$ より，$(V^\sharp \cap \mathcal{V}(F_0)) \cap D^m = \emptyset$ である．よって，$V^\sharp \cap \mathcal{V}(F_0)$ と D^m は $\mathbb{P}^n$ の射影代数的集合なので，

定理 8.8

$V_1, V_2 \subset \mathbb{P}^n$ を既約な射影代数的集合とする．$\operatorname{codim} V_1 + \operatorname{codim} V_2 \leq n$ ならば，$V_1 \cap V_2 \neq \emptyset$ である．

より，$\operatorname{codim}(V^\sharp \cap \mathcal{V}(F_0)) + \operatorname{codim} D^m > n$ であり，$\operatorname{codim} D^m \geq n-m$ を得る．一方，

定理 8.9, 8.10

$m \times n$ 行列からなるベクトル空間に対する射影空間を $\mathbb{P}M_{m,n}$ とする．このとき，

$$\mathcal{D}^r := \{A \in \mathbb{P}M_{m,n} : \operatorname{rank} A \leq r\}$$

に対して，

(1) $\operatorname{codim} D^r = (m-r)(n-r)$

(2) $D^r_{\mathrm{sing}} = D^{r-1}$

が成り立つ．この D^r を階数 r の **行列式多様体** と呼ぶ．

定理 8.9, 8.10 の系

$(F_{ij}(\widetilde{x}))_{ij}$ を斉次多項式を成分に持つ $m \times n$ 行列とし，

$$W^r = \{\widetilde{x} \in \mathbb{P}^N : \operatorname{rank}(F_{ij}(\widetilde{x}))_{ij} \leq r\}$$

とすると，

$$\operatorname{codim} W^r \leq (m-r)(n-r)$$

が成り立つ．さらに，$F_{ij}(\widetilde{x})$ が generic ならば，

(1) $\operatorname{codim} W^r = (m-r)(n-r)$

(2) $W^r_{\mathrm{sing}} = \{\widetilde{x} \in \mathbb{P}^N : \operatorname{rank}(F_{ij}(\widetilde{x}))_{ij} \leq r-1\}$

が成り立つ．

より，$\operatorname{codim} D^m \leq n-m$ なので，$\operatorname{codim} D^m = n-m$ が成り立つ．したがって，$\operatorname{codim} V^\sharp + \operatorname{codim} D^m = n$ より，$K^\sharp$ は空でない有限集合である．

さらに，$\mathbb{P}^n$ の正則行列での変換を考えると，$K^\sharp$ は $\mathbb{P}^n$ の有限集合なので，ほどんどの変換で $K^\sharp$ は $\mathcal{V}(x_0)$ と交わらない．よって，generic な $f_1, \dots f_m$ に対して $K = K^\sharp \cap D^+(x_0) = K^\sharp$ となり，K も空でない有限集合である． □

8.2 行列式多様体

$m \times n$ 行列からなるベクトル空間に対する射影空間を $\mathbb{P}M_{m,n}$ とする．このとき，

$$\mathcal{D}^r := \{A \in \mathbb{P}M_{m,n} : \operatorname{rank} A \leq r\}$$

を階数 r の **行列式多様体** と呼ぶ．今節では行列式多様体の次元と特異点集合を求める．

8.2.1 代数多様体の射

アファイン代数多様体

$X \subset \mathbb{C}^n, Y \subset \mathbb{C}^m$ をアファイン代数多様体する．このとき，$\varphi_i(x) \in \mathbb{C}[x_1, \ldots, x_n]$ に対して，$\varphi : X \to Y,\ \varphi(x) = (\varphi_1(x), \ldots, \varphi_m(x))$ を **多項式写像**，または **アファイン代数多様体の射** と呼ぶ．

例 8.2. (1) $\varphi(t) = (t^2, t^3)$ と定義すると，φ は $\mathbb{C}$ から $\mathcal{V}(y^2 - x^3) \subset C^2$ への多項式写像である．

(2) $\varphi : X \to \mathbb{C}^m$ を多項式写像とする．代数的集合 $V = \mathcal{V}(f_1, \ldots, f_r)$ に対して，

$$\varphi^{-1}(V) = \{x \in X : f_1(\varphi(x)) = \cdots = f_r(\varphi(x)) = 0\}$$

より，$\varphi^{-1}(V)$ も代数的集合なので，多項式写像はザリスキー位相で連続である．

射影代数多様体

$X \subset \mathbb{P}^n, Y \subset \mathbb{P}^m$ を射影代数多様体とし，$\varphi_i(x) \in \mathbb{C}[x_0, x_1, \ldots, x_n],\ i = 0, \ldots m$ を，次数の等しい斉次多項式で $X \cap \mathcal{V}_p(\varphi_1, \ldots, \varphi_m) = \emptyset$ を満たすものとする[21]．このとき，$\varphi : X \to Y,\ \varphi(x) = (\varphi_1(x), \ldots, \varphi_m(x))$ を **正則写像**，または **射影代数多様体の射** と呼ぶ．次数が等しいので，それを d とおくと $\varphi(\lambda x) = \lambda^d \varphi(x)$ となり，射影空間で良定義な写像である．

このように定義された φ は，射影代数多様体の一般の射の中で特殊なものでしかない．しかし，本講義ではこの種の射しか扱わないので，本定義を採用する[22]．実際には，多項式写像もアファイ代数多様体の射の中で特殊なものである．

[21] $X = \mathbb{P}^n$ とする．斉次多項式は零点として常に 0 を持つが，射影空間なので 0 は X に含まれない．

[22] 特に「射が存在する」という定理は用いない

例 8.3. (1) $\varphi(s, t) = (s^2, st, t^2)$ とすると，φ は $\mathbb{P}^1$ から $\mathcal{V}_p(xz - y^2) \subset \mathbb{P}^2$ への射である．

(2) $X \subset \mathbb{P}^n$ を射影代数多様体とし，$\varphi : X \to \mathbb{P}^m$ を正則写像とする．射影代数的集合 $V = \mathcal{V}_p(F_1, \ldots, F_r)$ に対して，

$$\varphi^{-1}(V) = \{x \in X : F_1(\varphi(x)) = \cdots = F_r(\varphi(x)) = 0\}$$

である．$\varphi(x)$ の各成分の次数が等しいので，$F_j(\varphi(x))$ も斉次多項式である．よって $\varphi^{-1}(V)$ も射影代数的集合なので，正則写像はザリスキー位相で連続である．

(3) $\nu_2(x, y, z) = (x^2, y^2, z^2, xy, yz, zx)$ とすると，ν_2 は $\mathbb{P}^2$ から $\mathbb{P}^5$ への射である．さらに，

$$\nu_2(\mathbb{P}^2) = \left\{(u_0, \ldots, u_5) \in \mathbb{P}^5 : \operatorname{rank} \begin{pmatrix} u_0 & u_3 & u_4 \\ u_3 & u_1 & u_5 \\ u_4 & u_5 & u_2 \end{pmatrix} \leq 1\right\}$$

が成り立つ．また，

$$\nu_2\left(\mathcal{V}(xz - y^2)\right) = \nu_2(\mathbb{P}^2) \cap \mathcal{V}_p(u_5 - u_1)$$

となる．この ν_2 を 2 次の **Veronese 写像** と呼ぶ．

(4) $\sigma(x,y,z,w)=(xz,xw,yz,yw)$ とすると，σ は $\mathbb{P}^1\times\mathbb{P}^1$ から $\mathbb{P}^3$ への射である．さらに，

$$\sigma(\mathbb{P}^1\times\mathbb{P}^1)=\mathcal{V}_p(u_0u_3-u_1u_2)$$

が成り立つ．この σ を **Segre 写像** と呼ぶ．

支配的射，滑らかな射

$X\subset\mathbb{C}^n, Y\subset\mathbb{C}^m$ をアファイン代数多様体とし，$\varphi: X\to Y,\ \varphi(x)=(\varphi_1(x),\ldots,\varphi_m(x))$ を射とする．

(1) 像が稠密；$\varphi(X)^-=Y$ のとき，φ を **支配的射** と呼ぶ．

(2) $x\in X,\ y\in\varphi(x)$ に対して，$d\varphi: T_xX\to T_yY$ を

$$d_x\varphi(\xi)=\left(\sum_i\frac{\partial\varphi_1}{\partial x_i}(x)\xi_i,\ldots,\sum_i\frac{\partial\varphi_m}{\partial x_i}(x)\xi_i\right)$$

と定義する．

φ が支配的射で，$x\in X,\ y=\varphi(x)\in Y$ がそれぞれの非特異点において $d_x\varphi$ が全射のとき，φ は x で **滑らかである** と言う．

例 8.4. (1) $V=\mathcal{V}(y^2-x^3)$ に対して，φ を $\mathbb{C}\to V,\ \varphi(t)=(t^2,t^3)$ と定義する．すると $T_t\mathbb{C}=\mathbb{C}\,T_{(t^2,t^3)}V=\{(\eta_1,\eta_2)\in C^2: 2t^3\eta_2-3t^4\eta_1=0\},\ d_t\varphi(\xi)=(2t\xi,3t^2\xi)$ となる．$t\neq0$ において φ は滑らかである．

(2) $V=\mathcal{V}_p(xz-y^2)$ に対して，φ を $\mathbb{P}^2\to V,\ \varphi(s,t)=(s^2,st,t^2)$ と定義する．$\mathbb{P}^2$ のアファイン開集合 $U_1=\{(s,t)\in\mathbb{P}^2: s\neq0\}$ から点 $q\in U_1$ をとる．すると，$q=(1,t)$ と書けるので，$V_1=\{(x,y,z)\in\mathbb{P}^2: x\neq0\}$ に対して，$\varphi: U_1\to V_1$ はアファイン代数多様体の射となる．$T_q\mathbb{P}^1=\mathbb{C}^1,\ T_{(1,t,t^2)}(\mathcal{V}_p(xz-y^2))=\{\eta\in\mathbb{C}^2: -2t\eta_1+\eta_2=0\},\ d_q\varphi(\xi)=(\xi,2t\xi)$ となる．したがって，U_1 上のすべての点で φ は滑らかである．$U_2=\{(s,t)\in\mathbb{P}^2: t\neq0\}$ に対しても同様にできるので，φ は（すべての点で）滑らかな射である．

8.2.2 ファイバーの次元定理

まず，次元に関する以下の定理を解説するために，下記の Sard の定理を用いる．

定理 8.5 (Sard の定理)**.** $\varphi: X\to Y$ を既約代数多様体[23]の支配的射とする．このとき，ある開集合 $U\subset Y$ が存在して，任意の $y\in U$ に対して，φ は $\varphi^{-1}(U)$ 上の全ての点において滑らかである．

[23] 本講義で単に代数多様体と書いたときは，アファイン代数多様体か射影代数多様体である．

定理 8.6 (ファイバーの次元定理)**.** $\varphi: X\to Y$ を既約代数多様体の支配的射とすると，

(1) 任意の $y \in \varphi(X)$ に対して，$\dim \varphi^{-1}(y) \geq \dim X - \dim Y$

(2) ある空でない開集合 $U \subset \varphi(X)$ が存在して，任意の $y \in U$ に対して，$\dim \varphi^{-1}(y) = \dim X - \dim Y$

が成り立つ．

解説. (1) Y をアファイン代数的集合とし，$y \in \varphi(X)$, $d = \dim Y$ とする．$\{y\}$ は Y で余次元 d なので，ある d 個の多項式が存在して，$\mathcal{V}(f_1, \ldots, f_d) \cap Y$ は y を含む有限集合になる．Y を y 以外の有限個点を含まない Y のアファイン開集合で置き換えると，$\mathcal{V}(f_1, \ldots, f_d) \cap Y = \{y\}$ となる．このとき，

$$(*) \quad \varphi^{-1}(y) = \{x \in X : f_1(\varphi(x)) = \cdots = f_d(\varphi(x)) = 0\}$$

と書ける．d 個多項式では次元は d 以上下がらないので，$\dim \varphi^{-1}(y) \geq \dim X - d$ が成り立つ．

(2) $\dim Y = d$, $x \in X$, $y = \varphi(x) \in Y$ を非特異点とする．まず $T_x(\varphi^{-1}(y)) \subset \ker d_x\varphi(x)$ を示す．y は非特異点より，近傍で Y は d 次元多様体となり，$\varphi = (\varphi_1, \ldots, \varphi_d)$ とおける．さらに (1) と同様に $\{y\} = \mathcal{V}(f_1, \ldots, f_d)$ となるように f_j をとる．すると $\xi \in T_x(\varphi^{-1}(y))$ に対して，$x(t) \in X$ が存在して $x(0) = x$, $x'(0) = \xi$ となるので，$(*)$ の定義式に $x(t)$ を代入して t について微分すれば，

$$\sum_i \frac{\partial f_j}{\partial y_i}(y) \left(\sum_k \frac{\partial \varphi_i}{\partial x_k}(x)\xi_k \right) = 0, \ j = 1, \ldots, d$$

を得る．いま $\{y\}$ 定義式の個数 d は Y における $\{y\}$ の余次元に等しいので，$\frac{\partial(f_1,\ldots,f_d)}{\partial(y_1,\ldots,y_d)}(y)$ の行ベクトルは一次独立となり，正則なので，$\xi \in \ker d_x\varphi(x)$ を得る．したがって，$T_x(\varphi^{-1}(y)) \subset \ker d_x\varphi(x)$ が成り立つ．

次に，Sard の定理より，ある開集合 U が存在して，任意の $y \in U$, $x \in \varphi^{-1}(y)$ に対して，$d_x\varphi : T_xX :\to T_yY$ は全射になる．よって線形空間の次元定理より，

$$\dim \ker d_x\varphi = \dim T_xX - \dim T_yY = \dim X - \dim Y$$

が成り立つ．また，(1) より，

$$\begin{aligned} \dim X - \dim Y \leq \dim \varphi^{-1}(y) &\leq \dim T_x\left(\varphi^{-1}(y)\right) \\ &\leq \dim \ker d_x\varphi = \dim X - \dim Y \end{aligned}$$

となり，したがって，$\dim \varphi^{-1}(y) = \dim X - \dim Y$ が成り立つ．

定理 8.7 (既約性定理). $\varphi : X \to Y$ を射影代数多様体の支配的射とする．このとき，

(1) Y が既約，

さらに任意の $y \in \varphi(X)$ に対して，

(2) $\varphi^{-1}(y)$ は既約，

(3) $\dim \varphi^{-1}(y)$ は一定値をとる

ならば，X は既約である．

Proof. φ は射影代数多様体の射なので，閉集合を閉集合に写す．また，Y は既約なので，$\varphi(X) = \varphi(X)^- = Y$ より，実際は全射である．$\dim \varphi^{-1}(y) = d$ とおくと，ファイバーの次元定理 8.6 より，

$$\dim X = \dim Y + d$$

が成り立つ．X の既約分解を $X = X_0 \cup X_1 \cup \cdots \cup X_r$ とし，$\dim X_0 = \dim X$ とする．$y \in \varphi(X_0)$ に対して，仮定 (2) より $\varphi^{-1}(y)$ は既約閉集合であるので，$\varphi^{-1}(y) \subset X_0$ が成り立つ．なぜなら，そうでないとすると $\varphi^{-1}(y) = \bigcup_i (\varphi^{-1}(y) \cap X_i)$ と二つ以上の空でない閉集合に分解されるので，$\varphi^{-1}(y)$ の既約性に矛盾する．よって，$\varphi_0 = \varphi|_{X_0}$, $y \in \varphi(X_0)$ に対して，$\varphi_0^{-1}(y) = \varphi^{-1}(y)$ となり，特に $\dim \varphi_0^{-1}(y) = d$ が成り立つ．ここで，$\varphi(X_0)$ は既約閉部分多様体なので，$\varphi_0 : X_0 \to \varphi(X_0)$ に対して，ファイバーの次元定理を適用する．すると，generic な $y \in \varphi_0(X_0)$ に対して，

$$\begin{aligned}\dim X = \dim X_0 &= \dim \varphi_0(X_0) + \dim \varphi_0^{-1}(y) \\ &= \dim \varphi(X_0) + \dim \varphi^{-1}(y) = \dim \varphi(X_0) + d\end{aligned}$$

が成り立つ．よって，$\dim \varphi(X_0) = \dim X - d = \dim Y$ である．したがって，$\varphi(X_0) \subset Y$ かつ Y は既約なので，$\varphi(X_0) = Y$ となる[24]．したがって，

$$X_0 = \bigcup_{y \in Y} \varphi_i^{-1}(y) = \bigcup_{y \in Y} \varphi^{-1}(y) = X$$

が成り立ち，X は既約である．

□

[24] 既約閉部分集合の上昇列の最大長を次元の定義に採用した利点である．

8.2.3 交叉の存在性

一般に，多様体 X, Y の交叉 $X \cap Y$ が非空になるかどうかは判定しにくい．ファイバーの次元定理を用いて，射影空間においては以下の存在定理を示すことができる．

定理 8.8. $X, Y \in \mathbb{P}^n$ を射影代数的集合とする[25]．このとき，$\dim X + \dim Y \geq \dim \mathbb{P}^n$ ならば，$X \cap Y \neq \emptyset$ である．

Proof. まず，X, Y が既約のとき示す．また，X, Y を定義する斉次多項式の零点を，そのままアファイン空間 $\mathbb{C}^{n+1}$ の集合として考えたものを $C(X), C(Y)$ とする[26]．すると $\pi : C(X) \setminus \{0\} \to X = (C(X) \setminus \{0\}) / \sim,\ x \mapsto [x]$ にファイバーの次元定理 8.6 を適用すると，任意の $x \in X$ に対して，$\varphi^{-1}(x) = 1$ となるので，

$$\dim (C(X) \setminus \{0\}) = \dim X + \varphi^{-1}(x) = \dim X + 1$$

[25] 射影多様体については必ずしも成り立たない．同じ射影空間 $\mathbb{P}^n$ の射影代数的集合でなければならない．

[26] 錘になる．

が成り立つ．同様に $\dim C(Y) = \dim Y + 1$ である．いま，$C(X) \cap C(Y)$ は斉次多項式の零点なので，$0 \in C(X) \cap C(Y)$ より，空でない．また，

$$\begin{aligned}\dim(C(X) \cap C(Y)) &\geq n + 1 - \operatorname{codim} C(X) - \operatorname{codim} C(Y) \\ &= \dim C(X) + \dim C(Y) - (n+1) = \dim X + \dim Y - n + 1 \geq 1\end{aligned}$$

より[27]，$C(X) \cap C(Y)$ は 0 以外の点 p を持つ．$C(X) \cap C(Y)$ は錘なので，定数倍について閉じており，$[p] \in X \cap Y$ である．よって $X \cap Y \neq \emptyset$ が成り立つ．

もし，X, Y のいずれかが既約でない場合には，それぞれを既約分解し，既約成分で次元が最大のものを X', Y' とすると，$\dim X' + \dim Y' \geq n$ なので，$(X \cap Y) \supset (X' \cap Y') \neq \emptyset$ となる．

[27] この不等式は示していないが，既約なアファイン代数的集合について成り立つ不等式である．

□

8.2.4 行列式多様体の次元と特異点

定理 8.9. 行列式多様体

$$\mathcal{D}^r := \{A \in \mathbb{P}M_{m,n} : \operatorname{rank} A \leq r\}$$

に対して，$\operatorname{codim} \mathcal{D}^r = (m-r)(n-r)$ である．

Proof.

$$E = \{(A, K) \in \mathbb{P}M_{m,n} \times G(n-r, n) : K \subset \ker A\}$$

とする．すると，$\pi_1 : E \to \mathbb{P}M_{m,n},\ (A, K) \mapsto A$ に対して，$\pi_1(E) = \mathcal{D}^r$ である．$\pi_2 : (A, K) \mapsto K$ とすると，任意の $K \in G(n-r, n)$ に対して，$\pi_2^{-1}(K) = rm - 1$ となる．よって 定理 8.7 より，E は既約である．したがって，定理 8.6 より，

$$\dim E = \dim G(n-r, n)) + \dim \pi_2^{-1}(K) = r(n-r) + rm - 1 = r(m+n-r) - 1$$

が成り立つ．$\mathcal{D}^r$ の中で階数がちょうど r となる行列は開集合をなし，$\pi_1(E) = \mathcal{D}^r$ が既約であることから，$\mathcal{D}^r$ で稠密になる．また，$\operatorname{rank} A = r$ となる A に対して，$K \subset \ker A$ となる $K \in G(n-r, n)$ は $\ker A$ そのもののみなので，$\dim \pi_1^{-1}(A) = 0$ となる．よって定理 8.6 より，

$$\dim \mathcal{D}^r = \dim E - \dim \pi_1^{-1}(A) = r(m+n-r) - 1$$

が成り立つ．したがって，

$$\operatorname{codim} \mathcal{D}^r = mn - 1 - r(m+n-r) + 1 = (m-r)(n-r)$$

となる．

□

定理 8.10. 行列式多様体 $\mathcal{D}^r$ の特異点集合 $(\mathcal{D}^r)_{sing}$ は $\mathcal{D}^{r-1}$ に等しい．

Proof. $A \in \mathcal{D}^s \setminus \mathcal{D}^{s-1}$ とする．すると，基底の取り換えにより A は

$$\begin{pmatrix} I_s & O \\ O & O \end{pmatrix}$$

と書ける．ここで I_s は $s \times s$ の単位行列である．A の $\mathbb{P}M_{m,n}$ におけるアファイン開集合を U とすると，U の元は，

$$X = \begin{pmatrix} 1 & x_{1,2} & x_{1,3} & \cdots & \cdots & & x_{1,n} \\ x_{2,1} & 1+x_{2,2} & x_{2,3} & \cdots & \cdots & & x_{2,n} \\ \vdots & & \ddots & & & & \\ x_{s,1} & \cdots & & 1+x_{s,s} & x_{s,s+1} & \cdots & x_{s,m} \\ x_{s+1,1} & \cdots & & x_{s+1,s} & x_{s+1,s+1} & \cdots & x_{s+1,m} \\ \vdots & & & & & \ddots & \\ x_{m,1} & \cdots & \cdots & & & & x_{m,n} \end{pmatrix}$$

と書ける．$s = r$ のとき，X の $(r+1) \times (r+1)$ 小行列式が $\mathcal{D}^r$ の定義多項式になる．それらの勾配ベクトルに，A を代入すると（$x_{i,j}$ をすべて 0 にする），$x_{i,j}$ に関して 1 次の項を持つ小行列式のみが非零ベクトルになる．いま，X の $(r+1) \times (r+1)$ 小行列式で 1 次の項を持つものは，$(1, \ldots, r)$ 行 $(1, \ldots, r)$ 列を選び，残りの 1 つを $i, j > r$ から選んだ小行列式である．したがって，$\mathcal{D}^r$ の余次元と等しい $(m-r)(n-r)$ 個の一次独立な勾配ベクトルを得る．したがって，$\mathcal{D}^r \setminus \mathcal{D}^{r-1}$ は $\mathcal{D}^r$ の非特異点である．

一方，$A \in \mathcal{D}^{r-1}$ とすると，X の $(r+1) \times (r+1)$ 小行列式で，1 次の項を持つものは存在しない．したがって，すべての勾配ベクトルが零ベクトルになり，A は $\mathcal{D}^r$ の特異点である．したがって，$(\mathcal{D}^r)_{\mathrm{sing}} = \mathcal{D}^{r-1}$ が成り立つ．

□

8.3 代数次数

KKT 条件

$$\nabla f_0(x) + \sum_{i=1}^{m} \lambda_i \nabla f_i(x) = 0$$
$$f_1(x) = \cdots = f_m(x) = 0$$

の解を複素数解まで広げて考えたとき，解が有限個の場合，イデアルの **消去定理** を用いれば，解 $\bar{x} = (\bar{x}_1, \ldots, \bar{x}_n)$ の座標は f_j の係数に関する代数関数になっている．つまり，各 i に対して，f_j の係数に関する有理関数 a_k と d が存在して，x_i は

$$\bar{x}_i^d + a_{d-1}\bar{x}_i^{d-1} + \cdots a_1 \bar{x}_i + a_0 = 0$$

の解になっている．さらに generic な f_i に対して，この多項式の次数 d は，全ての座標 x_i に対して等しくなる．これを **多項式最適化問題の代数次数** と呼ぶ．この次数は KKT 条件を満たす複素数解の個数になっているので，代数次数を求めるには解の個数を求めればよい．

8.3.1 代数多様体の次数

多項式最適化問題の代数次数は，代数多様体の次数を用いて求めることができる．

既約射影多様体 $X \subset \mathbb{P}^n$ に対して，generic な $n - \dim X$ 次元線型空間 L との共通部分 $X \cap L$ の要素数を X の**次数** と呼び，$\deg X$ と書く．X が既約でない場合，既約分解 $X = X_1 \cap \cdots \cap X_r$ に対して，$\deg X = \sum_i \deg X_i$ と定義する．

いま，Generic な超平面 H[28] に対して，$\dim(X \cap H) = \dim X - 1$ となるので，$\dim(X \cap L) = 0$ となり，$X \cap L$ は有限集合である．

[28] 余次元 1 の線型空間

例 8.11. (1) $X \subset \mathbb{P}^n$ が有限集合のとき，$\deg X$ は X の要素数である．

(2) 斉次多項式 F に対して，$\mathcal{V}(F) \subset \mathbb{P}^n$ の次数は $d = \deg F$ である．まず，$\operatorname{codim} \mathcal{V}(F) = 1$ より，$\mathbb{P}^n$ の 1 次線型空間は射影直線 $L = \{sa + tb \in \mathbb{P}^n : (s,t) \in \mathbb{P}^1\}$ になる[29]． $F(sa+tb)$ は s,t に関する斉次多項式となり，generic な a,b に対して，$F(sa+tb) = c\prod_{i=1}^{d}(\beta_i s - \alpha_i t)$ と書けるので，$\mathcal{V}(F) \cap L = \{(\alpha_1 a + \beta_1 b), \ldots, (\alpha_d a + \beta_d b)\}$ となる．したがって，$\deg \mathcal{V}(F) = \deg F$ である．

[29] $(sa_0 + tb_0, \ldots, sa_n + tb_n)$

(3) $X \subset \mathbb{P}^n$ を r 次元線形空間とするすると，1 次斉次多項式 f_i を用いて $X = \mathcal{V}(f_{r+1}, \ldots, f_n)$ と書ける．同様に $(n-r)$ 次元線型空間 L は $L = \mathcal{V}(f_1, \ldots, f_r)$ と書ける．$f_1(x) = 0, \ldots, f_n(x) = 0$ は $n \times (n+1)$ 斉次線形方程式であり，Generic な L に対して，その解は直線になる．よって，$X \cap L$ はその解直線が表す射影空間の一点からなる集合になる．よって次元によらず線形空間の次数は 1 である．

注記 8.12. Veronese 写像より，

$$\mathbb{P}^1 \simeq \nu_2(\mathbb{P}^1) = \{(s^2, st, t^2) \in \mathbb{P}^2 : (s,t) \in \mathbb{P}^1\} \subset \mathbb{P}^2$$

となる．同型射で次元は変わらないので[30]，$\dim X = 1$ である．$\nu_2(\mathbb{P}^1) \cap \mathcal{V}(a_0u_0 + a_1u_1 + a_2u_2)$ は $a_0s^2 + a_1st + a_2t^2 = 0$ の解なので，$\deg(\nu_2(\mathbb{P}^1)) = 2$ となる．一方，

[30] 同相写像で既約集合は既約集合に写る．

$$\mathbb{P}^1 \simeq \nu_3(\mathbb{P}^1) = \{(s^3, s^2t, st^2, t^3) \in \mathbb{P}^3 : (s,t) \in \mathbb{P}^2\} \subset \mathbb{P}^3$$

を考えると，$L = \mathcal{V}(a_0u_0 + a_1u_1 + a_2u_2 + a_3u_3)$ に対して[31]，$\nu_3(\mathbb{P}^1) \cap H$ は，$a_0s^3 + a_1s^2t + a_2st^2 + a_3t^3 = 0$ の解となる．よって，generic な L に対して，$\deg(\nu_3(\mathbb{P}^1)) = 3$ となる．したがって，次数は代数多様体を埋め込む射影空間 $\mathbb{P}^n$ によって異なる．

[31] $\dim L = 2$

一般の射影多様体に対して次数の良定義性を示すには以下の二つの定理が必要である．

定理 8.13 (Bertini の定理)**.** $X \subset \mathbb{P}^n$ を既約射影多様体，$F_0, F_1, \ldots, F_m$ を次数の等しい一次独立な斉次多項式，$I = (F_0, F_1, \ldots, F_m)$ とする．このとき，非空な開集合 $U \subset \mathbb{P}^m$ が存在して，各 $p \in U$ に対して，$Y = \mathcal{V}(\sum_{i=0}^m p_i F_i)$ とすると，

$$X \cap Y \setminus (X_{sing} \cap \mathcal{V}(I)) = \mathcal{V}\left(\mathcal{I}(X) + \sum_{i=0}^m p_i F_i\right) \setminus (X_{sing} \cap \mathcal{V}(I))$$

は空集合であるか，または，その全ての既約成分における重複度 1 の非特異な代数多様体であり，X と Y は横断的に交わる．

定理 8.14. $X \subset \mathbb{P}^n$ を非特異な既約射影多様体とする．$\dim X \geq 2$ ならば，*generic* な斉次多項式 F に対して，$X \cap \mathcal{V}(F)$ は $\dim X - 1$ 次元の非特異な既約射影多様体である．

ここで交叉 $X \cap Y$ の **重複度** とは，多項式の重根に対応するものである．例 8.11 (1) で，$\mathcal{V}(F) \cap L$ の要素数は s, t 変数多項式 $F(sa + tb)$ の零点の個数と一致する．しかし，L の選び方によっては $F(sa + tb)$ は重根を持つ：

$$F(sa + tb) = c \prod_{i=1}^{d'} (\beta_i s - \alpha_i t)^{e_i}, \quad e_1 + \cdots + e_{d'} = d$$

このとき，e_i 重根に対応する点 $(\alpha_i a + \beta_i b)$ の重複度は e_i である [32]．$X \cap L$ の要素数は L によるが，重複度の分だけ重ねて数えると $\deg F$ と一致する．

[32] $X \cap Y$ が有限集合の場合，$p \in X \cap Y$ の重複度の厳密な定義は $(\mathbb{C}[x]/(\mathcal{I}(X) + \mathcal{I}(Y)))_p$（$p$ における局所環）のベクトル空間としての次元である．

以下で定義されるように X と Y が **横断的に交わる** ならば，$X \cap Y$ の既約成分における重複度が 1 になる．

定理 8.15 (Bézout の定理)**.** $X, Y \in \mathbb{P}^n$ を既約射影多様体とする．$X \cap Y$ が $W_1 \cup \ldots \cup W_k$ と既約分解されたとき，

(1) $\dim W_i = \dim X + \dim Y - n$ $(i = 1, \ldots, k)$

(2) すべての i に対して，ある $x \in W_i$ が存在して，x は X, Y の非特異点であり，$\dim(T_x X \cap T_x Y) = \dim X + \dim Y - n$

ならば，

$$\deg(X \cap Y) = \deg X \, \deg Y$$

が成り立つ．(1), (2) が成り立つとき，X と Y は **横断的**に交わるという．

注記. (1) の 等式は $\dim W_i = n - \operatorname{codim} X - \operatorname{codim} Y$，$\operatorname{codim} W_i = \operatorname{codim} X + \operatorname{codim} Y$ などとも書ける．

例 8.16. Generic な斉次多項式 $f_1, \ldots, f_m$ に対して $X_r = \mathcal{V}(f_1, \ldots, f_{r-1}) \cap \mathcal{V}(f_r) = \mathcal{V}(f_1, \ldots, f_r)$ $(r \leq m)$ とする．f_j は generic なので，$\operatorname{codim} V = r$ かつ，Bertini の定理より X は非特異多様体となる．よって，任意の点 $x \in X$ において，$\operatorname{rank} \frac{\partial(f_1, \ldots, f_r)}{\partial(x_1, \ldots, x_n)} = \operatorname{codim} X_r = r$ となるので，$\nabla f_i(x)$ は一次独立である．よって，$\deg X_m = \deg f_1 \cdots \deg f_m$ である．

8.3.2 行列式多様体の次数

定理 8.17. $m \leq n$ のとき，行列式多様体

$$\mathcal{D}^{m-1} := \{A \in \mathbb{P}M_{m,n} : \operatorname{rank} A \leq m-1\}$$

に対して，

$$\deg \mathcal{D}^{m-1} = \binom{m}{n-1}$$

である（階数が（最大階数 -1）の行列式多様体）.

Proof. $\mathcal{D}^{m-1}$ と横断的に交わる（相補次元でない）線形部分空間 E で，$\mathcal{D}^{m-1} \cap E$ の次数を計算しやすいものを用意し，Bertini の定理 8.13 と Bézout の定理 8.15 を用いて，$\mathcal{D}^{m-1}$ の次数を求める.

$B = (b_{ij})$ を任意の $m \times m$ 小行列式が 0 でない行列とする．$B_j \in M_{m,n}$ を j 列のみ $(b_{1j}, \ldots, b_{nj})^T$ で，他の列は $(0, \ldots, 0)^T$ となる行列とし，

$$E = \left\{x_1 B_1 + \cdots + x_n B_n : x \in \mathbb{P}^{n-1}\right\}$$

とする．$\mathcal{D}^{m-1} \cap E$ の元は，

$$X = \begin{pmatrix} b_{1,1}x_1 & b_{1,2}x_2 & \cdots & b_{1,n}x_n \\ b_{2,1}x_1 & b_{2,2}x_2 & \cdots & b_{2,n}x_n \\ \vdots & & & \\ b_{m,1}x_1 & b_{m,2}x_2 & \cdots & b_{m,n}x_n \end{pmatrix}$$

の中で,「$m \times m$ 小行列式 $= 0$」を満たす行列である．また，X の 1 列から m 列の小行列式は，（1 列から m 列の B の小行列式）$\cdot x_1 x_2 \cdots x_m$ となり，他の小行列式も同様である.

ここで，

$$\bigcup_{|I|=n-m+1} \left\{X : X = \sum\nolimits_i x_i B_i,\ x \in \mathbb{P}^{n-1},\ x_i = 0,\ \forall i \in I\right\} = \left(\mathcal{D}^{m-1} \cap E\right)$$

を示す．$X \in E$ とする．X の各列から，任意の $n-m+1$ 個の $x_{i_1}, \ldots, x_{i_{n-m+1}}$ を選ぶ．すると，各 $m \times m$ 小行列式は，その中の少なくとも一つの x_{i_k} を含む．したがって，$x_{i_1} = \ldots = x_{i_{n-m+1}} = 0$ ならば，すべての小行列式が 0 になる．よって「$\subset$」が成り立つ．逆にすべての $I \subset \{1, \ldots, n\}$, $|I| = n-m+1$ に対して，ある $i \in I$ が存在して，$x_i \neq 0$ となるとする．まず，$I_1 = \{m, m+1 \ldots, n\}$ とする．この中で，0 でない列 i_1 と X の 1 列目を入れ替える．次に $I_2 = \{1, m+1, \ldots, n\}$ の中で，0 でない列 i_2 と X の 2 列目を入れ替える．これを繰り返し，最後に $I_m = \{j_1, \ldots, j_{n-m+1}\}$ の中でで 0 でない x_{j_k} を X の m 列とすれば，1 列から m 列の小行列式は 0 でない．よって,「$\supset$」も成り立つ．したがって，$\mathcal{D}^{m-1} \cap E$ は $(m-2)$ 次元部分空間の和集合になる [33].

さらに，$X = \sum_{i=1}^{n} x_i B_i \in \mathcal{D}^{m-1} \cap E$ で，ちょうど $m-1$ 個の $x_{i_1}, \ldots x_{i_{m-1}}$ が 0 でないものを考える．するとこの X において，$\mathcal{D}^{m-1}$ の定義多項式 [34] の勾配ベクトルを求め，X を代入すると，$x_{i_1} \cdots x_{i_{m-1}} \neq 0$ が，$n-m+1$ 個の

[33] 射影空間の部分空間として，$n-2$ 次元

[34] $m \times m$ 小行列式

勾配ベクトルの異なる成分に現れるので[35]，定義多項式のヤコビ行列の階数は $n-m+1$ となる．これは $(m-2)$ 次元部分空間の余次元に等しい．よって，B を generic に取り直せば，Bertini の定理 8.13 より，$\mathcal{D}^{m-1}$ と E は，重複度 1 で[36]横断的に交わる．和集合の次数はそれぞれの次数の和になるので，線形空間の次数が 1 であることと，Bézout の定理 8.15 より，

$$\deg \mathcal{D}^{m-1} = \deg \mathcal{D}^{m-1} \cdot \deg E = \deg(\mathcal{D}^{m-1} \cap E) = \binom{n}{m-1}$$

が成り立つ． □

[35] 定義多項式の中で，$i_1, \cdots, i_{m-1}, j$ 列からなる小行列式を考えると，j 列の変数の微分が 0 でない．

[36] 重複度 1 なので，set-theoretic な等式から次数を求めて良い．

8.3.3 多項式最適化問題の代数次数

Generic な f_j に対する，KKT 条件を満たす実行可能解の集合

$$K = \{x \in V : \text{ある } \lambda_1, \ldots, \lambda_m \text{ が存在して,} \nabla f_0(x) + \sum_{i=1}^{m} \lambda_i \nabla f_i(x) = 0\}$$

の要素数を **多項式最適化の代数次数** と呼ぶ．

$$S_r(x_1, \ldots, x_k) = \sum_{i_1 + \cdots i_k = r} x_1^{i_1} \cdots x_k^{i_k}$$

とする．

定理 8.18. *Generic な* $f_0, f_1, \ldots, f_m$ に対して，$d_j = \deg f_j$ とおく．このとき，問題 $(\mathcal{P})$ の代数次数は

$$d_1 \cdots d_m \, S_{n-m}(d_0 - 1, d_1 - 1, \ldots, d_m - 1)$$

に等しい．

Proof. $F_j = f_j^\sharp$ に対して，

$$V = \mathcal{V}_a(f_1, \ldots, f_n) = \{x \in \mathbb{C}^n : f_1(x) = \cdots = f_m(x) = 0$$
$$V^\sharp = \{\widetilde{x} = (x_0, x_1, \ldots, x_n) \in \mathbb{P}^n : F_1(\widetilde{x}) = \cdots F_m(\widetilde{x}) = 0\}$$
$$D^m = \left\{\widetilde{x} \in \mathbb{P}^n : \frac{\partial(F_0, F_1, \ldots, F_m)}{\partial(x_1, \ldots, x_n)}(\widetilde{x}) \text{ のすべての } (m+1) \times (m+1) \text{ 小行列式 } = 0\right\}$$

とする．$K = (V^\sharp \cap D^m) \cap D^+(x_0)$ の要素数を求める．Generic な $f_1, \ldots, f_m$ に対して，

定理 8.13, 8.15

Generic な斉次多項式 $F_1, \ldots, F_m$ に対して，

$$\deg \mathcal{V}_p(F_1, \ldots, F_m) = \deg F_1 \cdots \deg F_m$$

である．

より，$\deg V^\sharp = d_1 \cdots d_m$，$\operatorname{codim} V^\sharp = m$ である．いま定理 8.9, 8.10 の系より，

$\operatorname{codim} D^m = n-m$ かつ，$V^\sharp \cap D^m$ は有限集合なので，$\deg(V^\sharp \cap D^m)$ は $V^\sharp \cap D^m$ 要素数に等しい．

Bézout の定理 8.15

$X, Y \in \mathbb{P}^n$ を射影多様体 $\dim X = r, \dim Y = s$ とする．$X \cap Y$ が $W_1 \cup \ldots \cup W_k$ と既約分解されたとき，

(1) $\dim W_i = r + s - n \ (i = 1, \ldots, k)$

(2) すべての i に対して，ある $x \in W_i$ が存在して，x は X, Y の非特異点であり，$\dim(T_x X \cap T_x Y) = r + s - n$

ならば，

$$\sum_{i=1}^{k} \deg W_i = \deg X \ \deg Y$$

が成り立つ．(1), (2) が成り立つとき，X と Y は **横断的**に交わるという．

より，$V^\sharp$ と D^m が横断的に交わることを示せば，代数次数が求まる．まず，

$$X := \left\{ (\widetilde{x}, \widetilde{\lambda}) \in \mathbb{P}^n \times \mathbb{P}^m : F_1(\widetilde{x}) = \cdots = F_m(\widetilde{x}) = 0, \left(\frac{\partial(F_0, F_1, \ldots, F_m)}{\partial(x_1, \ldots, x_n)}(\widetilde{x}) \right)^T \lambda = 0 \right\}$$

とする．いま，$\widetilde{x} \in X$ に対して，$\operatorname{rank} \frac{\partial(F_0, F_1, \ldots, F_m)}{\partial(x_1, \ldots, x_n)}(\widetilde{x}) = m$ より，$(\widetilde{x}, \widetilde{\lambda}) \in X$ となる $\widetilde{\lambda}$ は唯一つである．したがって，$\dim X = \dim(V^\sharp \cap D^m) = 0$ であり，射影 $\pi_1 : \mathbb{P}^n \times \mathbb{P}^m \to \mathbb{P}^n$ に対して，$\pi_1 : X \to V^\sharp \cap D^m$ となる．X を定義する $m+n$ 個の方程式のヤコビ行列 J を求めると，$(m+n) \times (m+n+1)$ 行列

$$J(\widetilde{x}, \widetilde{\lambda}) = \left(\begin{array}{c|c} \begin{array}{c} \nabla F_1(\bar{x}) \\ \vdots \\ \nabla F_m(\bar{x}) \end{array} & O \\ \hline \sum_{k=0}^{m} \lambda_k \left(\frac{\partial^2 F_k}{\partial x_i \partial x_j}(\widetilde{x}) \right)_{\substack{1 \le i \le n, \\ 0 \le j \le n}} & \left(\frac{\partial(F_0, F_1, \ldots, F_m)}{\partial(x_1, \ldots, x_n)}(\widetilde{x}) \right)^T \end{array} \right)$$

となる．任意の $(\widetilde{x}, \widetilde{\lambda}) \in X$ に対して，$\widetilde{\lambda}_0 \neq 0$ かつ，左上と右下のブロックの階数は m である．ここで，$J(\widetilde{x}, \widetilde{\lambda})$ を行と列に関して基本変形し，

$$\left(\begin{array}{cccc|ccccc} 1 & 0 & \cdots & 0 & 0 & \cdots & & & 0 \\ \vdots & \ddots & \ddots & \vdots & \vdots & & & & \vdots \\ 0 & \cdots & 1 & 0 & 0 & \cdots & & & 0 \\ \hline * & \cdots & * & M(\widetilde{x}, \widetilde{\lambda}) & 0 & \cdots & & & 0 \\ * & \cdots & * & * & 1 & 0 & \cdots & & 0 \\ \vdots & \ddots & \vdots & & \vdots & \ddots & \ddots & & \vdots \\ * & \cdots & * & * & 0 & \cdots & & 1 & 0 \end{array} \right)$$

とできる．変形後の $J(\widetilde{x}, \widetilde{\lambda})$ は正則行列 P, Q を用いて $PJ(\widetilde{x}, \widetilde{\lambda})Q$ と書ける．$PJ(\widetilde{x}, \widetilde{\lambda})Q$ の部分行列を $M(\widetilde{x}, \widetilde{\lambda}) = \left(PJ(\widetilde{x}, \widetilde{\lambda})Q \right)_{i,j=m+1}^{n}$ とおく．generic な

$F_1, \dots, F_m$ を固定したのち，

$$\prod_{(\widetilde{x},\widetilde{\lambda})\in X} \det M(\widetilde{x},\widetilde{\lambda})$$

を，F_0 の係数を変数とする多項式と見ると，その零点集合の補集合から F_0 の係数を選べば，$M(\widetilde{x},\widetilde{\lambda})$ は階数最大になる．したがって，generic な $F_0, F_1, \dots, F_m$ に対して，$\operatorname{rank} J(\widetilde{x},\widetilde{\lambda}) = m+n$ である．ここで，任意の $p=(y,\mu)\in X$ を固定する．

$$A := V^\sharp \times \mathbb{P}^m = \{(\widetilde{x},\widetilde{\lambda}) \in \mathbb{P}^n \times \mathbb{P}^m : F_1(\widetilde{x}) = \cdots = F_m(\widetilde{x}) = 0\}$$
$$B := \left\{ (\widetilde{x},\widetilde{\lambda}) \in \mathbb{P}^n \times \mathbb{P}^m : \left(\frac{\partial(F_0, F_1, \dots, F_m)}{\partial(x_1, \dots, x_n)}(\widetilde{x}) \right)^T \lambda = 0 \right\},$$

に対して，$\operatorname{rank} J(\widetilde{x},\widetilde{\lambda}) = m+n$ より，(y,μ) は A, B それぞれの非特異点であり，$\dim(T_pA \cap T_pB) = 0$ となる．よって $X = A \cap B$ は横断的に交わっている．

いま，y は明らかに $V^\sharp$ の非特異点である．$\operatorname{rank} \frac{\partial(F_1,\dots,F_m)}{\partial(x_1,\dots,x_n)}(y) = m$ なので，定理 8.10 (2) より，y は D^m の非特異点でもある．よって，$T_yD^m = T_y\pi_1(B) \subset \pi_1(T_pB)$[37]かつ，$m = \dim T_yD^m \le \dim \pi_1(T_pB) \le \dim T_pB = m$ より，$T_yD^m = \pi_1(T_pB)$ が成り立つ．ここで $\varphi = \pi_1|_{T_pB}$ とおくと，$T_pA = T_yV^\sharp \times \mathbb{C}^m$ より，

$$\dim(T_yV^\sharp \cap T_yD^m) = \dim(T_pA \cap (\varphi(T_pB) \times \{0\}))$$

となる．いま，$\dim(T_pA \cap (\varphi(T_pB) \times \{0\})) \ge 1$ と仮定する．すると，ある直線 $\ell \subset T_yV^\sharp \cap \varphi(T_pB)$ が存在して，$\ell \times \{0\}^m \subset T_pA \cap (\varphi(T_pB) \times \{0\}^m)$ となる．このとき，$\ell \subset \varphi(T_pB)$ より，$\dim \varphi^{-1}(\ell) \ge 1$[38]かつ

$$\varphi^{-1}(\ell) \subset \varphi^{-1}\left(T_yV^\sharp \cap \varphi(T_pB)\right) = \varphi^{-1}(T_yV^\sharp) \cap T_pB = T_pA \cap T_pB$$

より，$\dim(T_pA \cap T_pB) = 0$ に矛盾する．したがって，$\dim(T_yV^\sharp \cap T_yD^m) = \dim(T_pA \cap (\varphi(T_pB) \times \{0\})) = 0$ より，$V^\sharp \cap D^m$ は横断的に交わる．

したがって，Bézout の定理より，

$$\deg(V^\sharp \cap D^m) = \deg V^\sharp \cdot \deg D^m$$

となる．ここで，

定理 [9, Prop. A.6]

$m < n$，$0 < d_1 \le \cdots d_m$，$M(x)$ を $m \times n$ 行列で，各行が $\mathbb{C}[x_0, x_1, \dots, x_N]$ の次数 d_i 斉次多項式からなるものとし，

$$X_{m-1} = \{x \in \mathbb{P}^N : \operatorname{rank} M(x) \le m-1\}$$

とする．このとき $N \ge n-m+1$ ならば，

$$\deg X_{m-1} = S_{n-m+1}(d_1, \dots, d_n)$$

が成り立つ．

[37] y のユークリッド近傍で，π_1 が一対一であることを用いれば，可微分多様体に対する標準的な結果である．$\pi_1(B)$ は y において非特異なので，局所的に可微分多様体である．

[38] φ は線形写像で，T_pB は線形空間である．

より，

$$\deg V^\sharp \cdot \deg D^m = d_1 \cdots d_m \, S_{n-m}(d_0 - 1, d_1 - 1, \ldots, d_m - 1)$$

である．代数次数は $\mathbb{P}^n$ の正則行列の変換に関して不変であり，ほとんどの変換で，有限集合 $V^\sharp \cap D^m$ は $\mathcal{V}(x_0)$ と交わらない．よって，generic な $f_0, f_1, \ldots, f_m$ に対して，$\deg((V^\sharp \cap D^m) \cap D^+(x_0)) = \deg(V^\sharp \cap D^m)$ となり，結論の式を得る．

□

参考文献

[1] M.F. Atiyah, I.G. Macdonald, *Introduction to Commutative Algebra*, Addison-Wesley, 1969.

[2] J. Bochnak, M. Coste, M. F. Roy, *Real algebraic geometry*, Springer-Verlag, Berlin, 1998.

[3] W. Fulton, *Algebraic Curves*, Addison-Wesley, 1989.

[4] J. Harris, *Algebraic Geometry*, Springer, New York, 1992.

[5] J. B. Lasserre, Global optimization with polynomials and the problem of moments, *SIAM J. Optim.* **11** (2001) 796–817.

[6] M. Laurent, Sums of squares, moments and polynomial optimization, *Emerging Applications of Algebraic Geometry*, IMA Volumes in Mathematics and its Applications **149** Springer-Verlag, 2009, 157–270.

[7] M. Marshall, *Positive polynomials and sums of squares*, Mathematical Surveys and Monographs **146**, American Mathematical Society, Providence, RI, 2008.

[8] D. Mumford, *Algebraic Geometry I: Complex Projective Varieties*, Springer, 1976.

[9] J. Nie, K. Ranestad, *Algebraic Degree of Polynomial Optimization*, SIAM J. Optim, **20** (2009) 485–502.

[10] P. A. Parrilo, Semidefinite programming relaxations for semialgebraic problems, *Math. Program.*, **96** (2003) 293–320.

[11] D. Perrin, *Algebraic Geometry*, Springer, London, 2008.

[12] M. Putinar, Positive polynomials on compact semi-algebraic sets, *Indiana Univ. Math. J.*, **42** (1993), 969–984.

[13] M. Schweighofer, Optimization of polynomials on compact semialgebraic sets, *SIAM J. Optim.* **15** (2005) 805–825.