線形代数 I　第 10 回練習問題　(担当: 関口 良行)

所属: ________　学籍番号: ________　氏名: ________

1. 次の行列を階段行列に変形し, 階数を求めよ. $\begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 & 1 & 6 \\ 2 & -1 & 1 & -4 & 3 \\ 5 & 6 & 11 & -7 & 12 \\ 2 & 2 & 4 & 2 & 12 \end{bmatrix}$

(解答例) 行に関する基本変形を行い, 階段行列を作る.

$$\begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 & 1 & 6 \\ 2 & -1 & 1 & -4 & 3 \\ 5 & 6 & 11 & -7 & 12 \\ 2 & 2 & 4 & 2 & 12 \end{bmatrix} \xrightarrow{2\text{ 行} - 1\text{ 行}} \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 & 1 & 6 \\ 0 & -5 & -5 & -6 & -9 \\ 5 & 6 & 11 & -7 & 12 \\ 2 & 2 & 4 & 2 & 12 \end{bmatrix} \xrightarrow[4\text{ 行} - 1\text{ 行} \times 2]{3\text{ 行} - 1\text{ 行} \times 5}$$

$$\begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 & 1 & 6 \\ 0 & -5 & -5 & -6 & -9 \\ 0 & -4 & -4 & -12 & -18 \\ 0 & -2 & -2 & 0 & 0 \end{bmatrix} \xrightarrow{4\text{ 行と } 2\text{ 行を入れ替え}} \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 & 1 & 6 \\ 0 & -2 & -2 & 0 & 0 \\ 0 & -4 & -4 & -12 & -18 \\ 0 & -5 & -5 & -6 & -9 \end{bmatrix} \xrightarrow{2\text{ 行を } (-1/2)\text{ 倍}}$$

$$\begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 & 1 & 6 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & -4 & -4 & -12 & -18 \\ 0 & -5 & -5 & -6 & -9 \end{bmatrix} \xrightarrow[4\text{ 行} + 2\text{ 行} \times 5]{3\text{ 行} + 2\text{ 行} \times 4} \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 & 1 & 6 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -12 & -18 \\ 0 & 0 & 0 & -6 & -9 \end{bmatrix} \xrightarrow{4\text{ 行} - 3\text{ 行} \times (1/2)} \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 & 1 & 6 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -12 & -18 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

答え 階数 3

2. 次の行列 A, B について階数, 行列式を求めよ. また逆行列が存在する場合は, 逆行列を求めよ.

(1) $A = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 3 & 1 & 0 \\ 2 & 3 & 5 & 2 \\ 1 & 0 & 4 & 2 \end{bmatrix}$

(解答例) 行に関する基本変形を行い, 階段行列を作る. その際, 結果を行列式の計算にも使えるように, 「ある行に他の行の定数倍を足す」という変形のみを使う.

$$A \xrightarrow{2\text{ 行} - 1\text{ 行}} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 3 & 1 & -1 \\ 2 & 3 & 5 & 2 \\ 1 & 0 & 4 & 2 \end{bmatrix} \xrightarrow[4\text{ 行} - 1\text{ 行}]{3\text{ 行} - 1\text{ 行} \times 2} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 3 & 1 & -1 \\ 0 & 3 & 5 & 0 \\ 0 & 0 & 4 & 1 \end{bmatrix} \xrightarrow{4\text{ 行} - 3\text{ 行}} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 3 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 4 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

答え $\operatorname{rank} A = 3$, A は 4×4 行列だが, $\operatorname{rank} A = 3 < 4$ なので, 逆行列は存在しない. よって, $\det A = 0$.

裏へ続く

(2) $B = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 3 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 2 & 2 \\ 1 & 0 & 4 & 2 \end{bmatrix}$

(解答例)

$$B \to \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 3 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 4 & 1 \end{bmatrix} \to \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 3 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \end{bmatrix}$$

よって, $\operatorname{rank} B = 4$. いま B は 4×4 行列であり, $\operatorname{rank} B = 4$ なので, 逆行列は存在し, $|B| \neq 0$.

まず, 行列式を計算する. 上記の変形は B の行列式の値を変えないことに注意すると,

$$|B| = \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 3 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \end{vmatrix} = 1 \cdot 3 \cdot 2 \cdot (-1) = -6$$

次に逆行列を求める.

$$[\ B\ E\ ] = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 3 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 2 & 2 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 4 & 2 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \xrightarrow{\text{下方向に基本変形}} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 1 & -1 & -1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 1 & -1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 & -1 & 0 & -2 & 1 \end{bmatrix}$$

$$\xrightarrow{\text{上方向に基本変形}} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 2 & 0 & -2 & 1 \\ 0 & 3 & 0 & 0 & -2 & 1 & 5/2 & -3/2 \\ 0 & 0 & 2 & 0 & 0 & 0 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & -1 & 1 & 0 & -2 & 1 \end{bmatrix}$$

$$\to \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 2 & 0 & -2 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & -2/3 & 1/3 & 5/6 & -1/2 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & -1/2 & 1/2 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & -1 & 0 & 2 & -1 \end{bmatrix}$$

$$\text{答え } \operatorname{rank} B = 4, \det B = -6,\ B^{-1} = \begin{bmatrix} 2 & 0 & -2 & 1 \\ -2/3 & 1/3 & 5/6 & -1/2 \\ 0 & 0 & -1/2 & 1/2 \\ -1 & 0 & 2 & -1 \end{bmatrix}$$

感想・要望など