線形代数 I 第 11 回練習問題 (担当: 関口 良行)

所属: __________ 学籍番号: __________ 氏名: __________

1. 次の連立 1 次方程式 $A\boldsymbol{x} = \boldsymbol{c}$ について, $\operatorname{rank} A, \operatorname{rank}[A\ \boldsymbol{c}]$ を求め解の自由度を答えよ. また, 解を求めベクトル表示せよ.

(1) $\begin{cases} x + 2y + 9z + 5w = 12 \\ 3x + 2y - z + 11w = 4 \\ x + y + 2z + 4w = 4 \end{cases}$

(解答例)

$$[A\ \boldsymbol{c}] =$$

$$\begin{bmatrix} 1 & 2 & 9 & 5 & 12 \\ 3 & 2 & -1 & 11 & 4 \\ 1 & 1 & 2 & 4 & 4 \end{bmatrix} \xrightarrow{\text{下向きに行基本変形}} \begin{bmatrix} 1 & 2 & 9 & 5 & 12 \\ 0 & 1 & 7 & 1 & 8 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \xrightarrow{\text{上向きに行基本変形}} \begin{bmatrix} 1 & 0 & -5 & 3 & -4 \\ 0 & 1 & 7 & 1 & 8 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

$$\operatorname{rank} A = \operatorname{rank} \begin{bmatrix} 1 & 0 & -5 & 3 \\ 0 & 1 & 7 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} = 2, \quad \operatorname{rank}[A\ \boldsymbol{c}] = \begin{bmatrix} 1 & 0 & -5 & 3 & -4 \\ 0 & 1 & 7 & 1 & 8 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} = 2$$

よって, $\operatorname{rank} A = \operatorname{rank}[A\ \boldsymbol{c}] = 2$ なので, 解は存在し, (変数の数 4) $- \operatorname{rank} A = 2$ なので, 自由度は 2 となる.

いま, $[A\ \boldsymbol{c}]$ を変形して得た階段行列は

$$\begin{cases} x \quad - 5z + 3w = -4 \\ \quad y + 7z + w = 8 \end{cases}$$

を表す. よって, パラメータを用いて, $z = s, w = t$ とおくと, 解は

$$\begin{bmatrix} x \\ y \\ z \\ w \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -4 + 5s - 3t \\ 8 - 7s - t \\ s \\ t \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -4 \\ 8 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} + s \begin{bmatrix} 5 \\ -7 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} + t \begin{bmatrix} -3 \\ -1 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}$$

と書ける.

注意 方程式の解全体である, パラメータを任意に動かして得た集合

$$\left\{ \begin{bmatrix} -4 \\ 8 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} + s \begin{bmatrix} 5 \\ -7 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} + t \begin{bmatrix} -3 \\ -1 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} \middle| s, t\text{: 任意} \right\}$$

は唯一に定まるが, パラメータを用いた解の表示そのものはいくつもの表示の仕方がある. 例えば階段行列が表す連立 1 次方程式で, $x = s, y = t$ とおけば, 異なる解の表示を得る.

もし解の表示が上記と異なっていても, 元の連立 1 次方程式に代入すれば, 答えが合っているかどうか確認できる. なお解の自由度 (パラメータの個数) は必ず一致する.

裏へ続く

(2) $\begin{cases} \quad x - 2y + \ \ z - 3w = \ \ 1 \\ -2x + 4y - 2z + 6w = -2 \end{cases}$

(解答例)

$$[A\ \boldsymbol{c}] = \begin{bmatrix} 1 & -2 & 1 & -3 & 1 \\ -2 & 4 & -2 & 6 & -2 \end{bmatrix} \xrightarrow{\text{下向きに行基本変形}} \begin{bmatrix} 1 & -2 & 1 & -3 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

よって,

$$\operatorname{rank} A = \operatorname{rank} \begin{bmatrix} 1 & -2 & 1 & -3 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} = 1, \quad \operatorname{rank}[A\ \boldsymbol{c}] = \operatorname{rank} \begin{bmatrix} 1 & -2 & 1 & -3 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} = 1$$

よって, $\operatorname{rank} A = \operatorname{rank}[A\ \boldsymbol{c}] = 1$ なので, 解は存在し (変数の数)$4 - \operatorname{rank} A = 3$ より, 解の自由度は 3 となる.

変形後の行列は

$$\left\{ \ x - 2y + z - 3w = 1 \right.$$

を表す. よってパラメータを用いて, $y = s, z = t, w = u$ とすると,

$$\begin{bmatrix} x \\ y \\ z \\ w \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 + 2s - t + 3u \\ s \\ t \\ u \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} + s \begin{bmatrix} 2 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} + t \begin{bmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} + u \begin{bmatrix} 3 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}$$

と書ける.

注意 (1) と同様.

$\boxed{\text{感想・要望など}}$