線形代数 I　第 13 回 練習問題　(担当: 関口 良行)

所属: ______________　学籍番号: ______________　氏名: ______________

1. 逆行列を計算せよ $\begin{bmatrix} 4 & 2 & 1 \\ 2 & 1 & 0 \\ -3 & -1 & -3 \end{bmatrix}^{-1}$

(解答例) 行に関してのみ基本変形を行う. 0 をなるべく増やす.

$$\begin{bmatrix} 4 & 2 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 2 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ -3 & -1 & -3 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \xrightarrow{1\text{ 行} - 2\text{ 行} \times 2} \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 & 1 & -2 & 0 \\ 2 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ -3 & -1 & -3 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \xrightarrow{3\text{ 行} + 2\text{ 行}}$$

$$\begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 & 1 & -2 & 0 \\ 2 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & -3 & 0 & 1 & 1 \end{bmatrix} \xrightarrow{3\text{ 行} + 1\text{ 行} \times 3} \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 & 1 & -2 & 0 \\ 2 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 0 & 3 & -5 & 1 \end{bmatrix}$$

$$\xrightarrow{2\text{ 行} + 3\text{ 行} \times 2} \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 & 1 & -2 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 6 & -9 & 2 \\ -1 & 0 & 0 & 3 & -5 & 1 \end{bmatrix} \xrightarrow[1\text{ 行と }3\text{ 行を入れ替える}]{3\text{ 行} \times (-1)} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & -3 & 5 & -1 \\ 0 & 1 & 0 & 6 & -9 & 2 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & -2 & 0 \end{bmatrix}$$

答え $\begin{bmatrix} -3 & 5 & -1 \\ 6 & -9 & 2 \\ 1 & -2 & 0 \end{bmatrix}$

2. 次の連立 1 次方程式 $A\boldsymbol{x} = \boldsymbol{c}$ について, $\operatorname{rank} A, \operatorname{rank}[A\ \boldsymbol{c}]$ を求め解の自由度を答えよ. また, 解を求めベクトル表示せよ.

(1) $\begin{cases} 3x - \ \ y - 6z = \ \ 8 \\ 4x - \ \ y - 8z = 11 \\ 2x + 3y - 4z = \ \ 9 \end{cases}$

(解答例)

$$\begin{bmatrix} 3 & -1 & -6 & 8 \\ 4 & -1 & -8 & 11 \\ 2 & 3 & -4 & 9 \end{bmatrix} \xrightarrow{2\text{ 行} - 1\text{ 行}} \begin{bmatrix} 3 & -1 & -6 & 8 \\ 1 & 0 & -2 & 3 \\ 2 & 3 & -4 & 9 \end{bmatrix} \xrightarrow{1\text{ 行} - 3\text{ 行}}$$

$$\begin{bmatrix} 1 & -4 & -2 & -1 \\ 1 & 0 & -2 & 3 \\ 2 & 3 & -4 & 9 \end{bmatrix} \xrightarrow{1\text{ 行} - 2\text{ 行}} \begin{bmatrix} 0 & -4 & 0 & -4 \\ 1 & 0 & -2 & 3 \\ 2 & 3 & -4 & 9 \end{bmatrix}$$

$$\xrightarrow[3\text{ 行} - 2\text{ 行} \times 2]{1\text{ 行} \times (-1/4)} \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & -2 & 3 \\ 0 & 3 & 0 & 3 \end{bmatrix} \xrightarrow{3\text{ 行} - 1\text{ 行} \times 3} \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & -2 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

よって, $\operatorname{rank} A = \operatorname{rank}[A\ \boldsymbol{c}] = 2$, 自由度は, (変数の数) $3 - \operatorname{rank} A = 1$ である. パラメータ s を用いて, $z = s$ とおくと, 解は

$$\begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3+2s \\ 1 \\ s \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 2s \\ 0 \\ s \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} + s \begin{bmatrix} 2 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} \text{ と書ける.}$$

(2) $$\begin{cases} 2x - 2y - 3z + 5w = 5 \\ x - 2y - 2z + 3w = 1 \\ 3x - 4y - 5z + 8w = 6 \end{cases}$$

(解答例)

$$\begin{bmatrix} 2 & -2 & -3 & 5 & 5 \\ 1 & -2 & -2 & 3 & 1 \\ 3 & -4 & -5 & 8 & 6 \end{bmatrix} \xrightarrow{3\text{ 行}-1\text{ 行}} \begin{bmatrix} 2 & -2 & -3 & 5 & 5 \\ 1 & -2 & -2 & 3 & 1 \\ 1 & -2 & -2 & 3 & 1 \end{bmatrix} \xrightarrow{3\text{ 行}-2\text{ 行}}$$
$$\begin{bmatrix} 2 & -2 & -3 & 5 & 5 \\ 1 & -2 & -2 & 3 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \xrightarrow{1\text{ 行}-2\text{ 行}} \begin{bmatrix} 1 & 0 & -1 & 2 & 4 \\ 1 & -2 & -2 & 3 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$
$$\xrightarrow{2\text{ 行}-1\text{ 行}} \begin{bmatrix} 1 & 0 & -1 & 2 & 4 \\ 0 & -2 & -1 & 1 & -3 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

よって, $\operatorname{rank} A = \operatorname{rank}[A\ \boldsymbol{c}] = 2$, 自由度は (変数の数) $4 - \operatorname{rank} A = 2$ である. パラメータ s, t を用いて, $z = s, w = t$ とおくと, 解は

$$\begin{bmatrix} x \\ y \\ z \\ w \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 4+s-2t \\ 3/2-1/2s+1/2t \\ s \\ t \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 4 \\ 3/2 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} s \\ -1/2s \\ s \\ 0 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} -2t \\ 1/2t \\ 0 \\ t \end{bmatrix}$$
$$= \begin{bmatrix} 4 \\ 3/2 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} + s \begin{bmatrix} 1 \\ -1/2 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} + t \begin{bmatrix} -2 \\ 1/2 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} \text{ と書ける.}$$