線形代数 I　第 1 回小テスト　(関口 良行)

学籍番号: ________________　氏名: ________________

1. 次の連立 1 次方程式を行列表示し, それをガウスの消去法を用いて階段行列に変形せよ. また連立 1 次方程式の解があれば求めよ.

(1) $\begin{cases} x + y + z = 6 \\ x + 2y + 2z = 11 \\ 2x + 3y - 4z = 3 \end{cases}$

(解答) 基本変形より前進消去を行うと,

$$\begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 6 \\ 1 & 2 & 2 & 11 \\ 2 & 3 & -4 & 3 \end{bmatrix} \to \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 6 \\ 0 & 1 & 1 & 5 \\ 0 & 1 & -6 & -9 \end{bmatrix} \to \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 6 \\ 0 & 1 & 1 & 5 \\ 0 & 0 & -7 & -14 \end{bmatrix} \to \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 6 \\ 0 & 1 & 1 & 5 \\ 0 & 0 & 1 & 2 \end{bmatrix}.$$

よって連立 1 次方程式は

$$\begin{cases} x + y + z = 6 \\ \quad\ y + z = 5 \\ \qquad\ z = 2 \end{cases}$$

と変形されるので, 後退代入より $(x, y, z) = (1, 3, 2)$.

(2) $\begin{cases} x + y + z = 6 \\ x + y + 2z = 11 \\ 2x + 3y - 4z = 3 \end{cases}$

(解答)

$$\begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 6 \\ 1 & 1 & 2 & 11 \\ 2 & 3 & -4 & 3 \end{bmatrix} \to \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 6 \\ 0 & 0 & 1 & 5 \\ 0 & 1 & -6 & -9 \end{bmatrix} \to \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 6 \\ 0 & 1 & -6 & -9 \\ 0 & 0 & 1 & 5 \end{bmatrix}.$$

よって, $(x, y, z) = (-20, 21, 5)$.

(3) $\begin{cases} x + y + z = 6 \\ x + y + 2z = 11 \\ 2x + 2y - 4z = 3 \end{cases}$

(解答)

$$\begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 6 \\ 1 & 1 & 2 & 11 \\ 2 & 2 & -4 & 3 \end{bmatrix} \to \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 6 \\ 0 & 0 & 1 & 5 \\ 0 & 0 & -6 & -9 \end{bmatrix} \to \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 6 \\ 0 & 0 & 1 & 5 \\ 0 & 0 & 0 & 21 \end{bmatrix}.$$

よって連立 1 次方程式は

$$\begin{cases} x + y + z = 6 \\ 0x + 0y + z = 5 \\ 0x + 0y + 0z = 3 \end{cases}$$

と変形されたので, 解は存在しない.

裏へ続く

(4) $\begin{cases} x+ & 4y+ & 2z+ & 3w = & 1 \\ 2x+ & 3y+ & 4z+ & w = & -2 \\ 3x+ & 2y+ & z+ & 4w = & 3 \\ 4x+ & y+ & 3z+ & 2w = & 0 \end{cases}$

(解答)

$$\begin{bmatrix} 1 & 4 & 2 & 3 & 1 \\ 2 & 3 & 4 & 1 & -2 \\ 3 & 2 & 1 & 4 & 3 \\ 4 & 1 & 3 & 2 & 0 \end{bmatrix} \to \begin{bmatrix} 1 & 4 & 2 & 3 & 1 \\ 0 & -5 & 0 & -5 & -4 \\ 0 & -10 & -5 & -5 & 0 \\ 0 & -15 & -5 & -10 & -4 \end{bmatrix} \to \begin{bmatrix} 1 & 4 & 2 & 3 & 1 \\ 0 & 5 & 0 & 5 & 4 \\ 0 & 0 & -5 & 5 & 8 \\ 0 & 0 & -5 & 5 & 8 \end{bmatrix} \to \begin{bmatrix} 1 & 4 & 2 & 3 & 1 \\ 0 & 5 & 0 & 5 & 4 \\ 0 & 0 & -5 & 5 & 8 \\ 0 & 0 & -5 & 5 & 8 \end{bmatrix}.$$

よって連立 1 次方程式は

$$\begin{cases} x+ & 4y+ & 2z+ & 3w = & 1 \\ & 5y+ & & 5w = & 4 \\ & & -5z+ & 5w = & 8 \end{cases}$$

と変形された.
パラメータ t を用いて, $w = t$ と置くと, 解は $(x, y, z, w) = (-t+1, -t+4/5, t-8/5, t)$ と書ける.

2. 1.(3) の連立 1 次方程式の第 3 式を次のように書き換えた. このとき解が存在するような a を求めよ. またそのとき解を求めよ.
$\begin{cases} x+ & y+ & z = & 6 \\ x+ & y+ & 2z = & 11 \\ 2x+ & 2y- & 4z = & a \end{cases}$

(解答)

$$\begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 6 \\ 1 & 1 & 2 & 11 \\ 2 & 2 & -4 & a \end{bmatrix} \to \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 6 \\ 0 & 0 & 1 & 5 \\ 0 & 0 & -6 & a-12 \end{bmatrix} \to \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 6 \\ 0 & 0 & 1 & 5 \\ 0 & 0 & 0 & a+18 \end{bmatrix}.$$

よって連立 1 次方程式は

$$\begin{cases} x+ & y+ & z = & 6 \\ 0x+ & 0y+ & z = & 5 \\ 0x+ & 0y+ & 0z = & a+18 \end{cases}$$

と変形された. 最後の式に注目すると, $a + 18 = 0$ のときのみ解が存在することがわかる.
このとき連立 1 次方程式は

$$\begin{cases} x+ & y+ & z = & 6 \\ & & z = & 5 \end{cases}$$

となる. よって解が存在するのは $a = -18$ のときであり, そのとき, パラメータ t を用いて $y = t$ と置くと, 解は $(x, y, z) = (1-t, t, 5)$ と書ける.