線形代数 I 第 2 回練習問題 (担当: 関口 良行)

学科: ____________ 学籍番号: ____________ 氏名: ____________

1. 次の行列式の値を求めよ.

(1) $$\begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 5 & 2 \\ 3 & 2 & 1 \end{vmatrix} = 1 \cdot \begin{vmatrix} 5 & 2 \\ 2 & 1 \end{vmatrix} - 2 \cdot \begin{vmatrix} 2 & 2 \\ 3 & 1 \end{vmatrix} + 3 \cdot \begin{vmatrix} 2 & 5 \\ 3 & 2 \end{vmatrix} = 1 \cdot 1 - 2(-4) + 3(-11) = -24$$

(2) $$\begin{vmatrix} 1 & 2 & 4 \\ 3 & 1 & 2 \\ -1 & 5 & 1 \end{vmatrix} = 1 \cdot \begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 5 & 1 \end{vmatrix} - 2 \cdot \begin{vmatrix} 3 & 2 \\ -1 & 1 \end{vmatrix} + 4 \cdot \begin{vmatrix} 3 & 1 \\ -1 & 5 \end{vmatrix} = 1(-9) - 2 \cdot 5 + 4 \cdot 16 = 45$$

2. 次の行列式の値を, 計算過程を明示し求めよ. また, その結果が示唆することを答えよ.

(1) 上三角行列 $$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ 0 & a_{22} & a_{23} \\ 0 & 0 & a_{33} \end{vmatrix} = a_{11} \begin{vmatrix} a_{22} & a_{23} \\ 0 & a_{33} \end{vmatrix} - a_{12} \begin{vmatrix} 0 & a_{23} \\ 0 & a_{33} \end{vmatrix} + a_{13} \begin{vmatrix} 0 & a_{22} \\ 0 & 0 \end{vmatrix} = a_{11}a_{22}a_{33}$$

考察: 上三角行列の行列式の値は, その対角要素を掛けたもの.

(2) $$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{11} & a_{13} \\ a_{21} & a_{21} & a_{23} \\ a_{31} & a_{31} & a_{33} \end{vmatrix} = a_{11} \begin{vmatrix} a_{21} & a_{23} \\ a_{31} & a_{33} \end{vmatrix} - a_{11} \begin{vmatrix} a_{21} & a_{23} \\ a_{31} & a_{33} \end{vmatrix} + a_{13} \begin{vmatrix} a_{21} & a_{21} \\ a_{31} & a_{31} \end{vmatrix} = a_{13} \begin{vmatrix} a_{21} & a_{21} \\ a_{31} & a_{31} \end{vmatrix}$$

2 次の行列式で, 同じ列を持つものの値は 0 だったので, 与えられた行列式の値は 0.

考察: 3 次の行列式でも, 同じ列を持つ行列式の値は 0.

裏へ続く

3. クラメルの公式を用いて次の連立 1 次方程式の解を求めよ.

(1) $\begin{cases} 2x + 3y = \ \ 8 \\ 4x + 5y = 18 \end{cases}$

(解答) 係数行列の行列式は $\begin{vmatrix} 2 & 3 \\ 4 & 5 \end{vmatrix} = -2 \neq 0$ なので, クラメルの公式より,

$$x = \frac{\begin{vmatrix} 8 & 3 \\ 18 & 5 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} 2 & 3 \\ 4 & 5 \end{vmatrix}} = \frac{-14}{-2} = 7, \quad y = \frac{\begin{vmatrix} 2 & 8 \\ 4 & 18 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} 2 & 3 \\ 4 & 5 \end{vmatrix}} = \frac{4}{-2} = -2$$

答え $(x, y) = (7, -2)$

復習問題

1. 次の連立 1 次方程式を行列表示し, それをガウスの消去法を用いて階段行列に変形せよ.
また連立 1 次方程式の解があれば求めよ.

(1) $\begin{cases} 2x + \ \ y + \ \ 4z = 3 \\ 4x + 3y + 10z = 5 \\ 2x + 3y + \ \ 8z = 1 \end{cases}$

(解答)

$$\begin{bmatrix} 2 & 1 & 4 & 3 \\ 4 & 3 & 10 & 5 \\ 2 & 3 & 8 & 1 \end{bmatrix} \to \begin{bmatrix} 2 & 1 & 4 & 3 \\ 0 & 1 & 2 & -1 \\ 0 & 2 & 4 & -2 \end{bmatrix} \to \begin{bmatrix} 2 & 1 & 4 & 3 \\ 0 & 1 & 2 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

答え $(x, y, z) = (2 - t, -1 - 2t, t)$

(2) $\begin{cases} \ \ x + 3y + 2z + \ \ 8w = 11 \\ 2x + 7y + 6z + 21w = 28 \\ \ \ x + 6y + 9z + 25w = 31 \\ 3x + 8y + 2z + 15w = 23 \end{cases}$

(解答)

$$\begin{bmatrix} 1 & 3 & 2 & 8 & 11 \\ 2 & 7 & 6 & 21 & 28 \\ 1 & 6 & 9 & 25 & 31 \\ 3 & 8 & 2 & 15 & 23 \end{bmatrix} \to \begin{bmatrix} 1 & 3 & 2 & 8 & 11 \\ 0 & 1 & 2 & 5 & 6 \\ 0 & 3 & 7 & 17 & 20 \\ 0 & -1 & -4 & -9 & -10 \end{bmatrix} \to \begin{bmatrix} 1 & 3 & 2 & 8 & 11 \\ 0 & 1 & 2 & 5 & 6 \\ 0 & 0 & 1 & 2 & 2 \\ 0 & 0 & -2 & -4 & -4 \end{bmatrix} \to \begin{bmatrix} 1 & 3 & 2 & 8 & 11 \\ 0 & 1 & 2 & 5 & 6 \\ 0 & 0 & 1 & 2 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

答え $(x, y, z, w) = (1 - t, 2 - w, 2 - 2w, w)$

感想・要望など