線形代数 I　第 3 回練習問題　(担当: 関口 良行)

所属: ＿＿＿＿＿＿　学籍番号: ＿＿＿＿＿＿　氏名: ＿＿＿＿＿＿

1. $A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{bmatrix}$ とする.

与えられた行列式を計算することにより, 次のような 3 次の行列式の性質を調べよ. また数値の与えられている行列式の値を求めよ.

(1) 行列を転置しても, 行列式の値は変わらない.

$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{21} & a_{31} \\ a_{12} & a_{22} & a_{32} \\ a_{13} & a_{23} & a_{33} \end{vmatrix}$ を最後まで展開したものと, $|A|$ を最後まで展開したものを比較し正しいことを示す.

(2) 2 つの列を入れ替えると, 行列式の値は (-1) 倍になる.

$$\begin{vmatrix} a_{13} & a_{12} & a_{11} \\ a_{23} & a_{22} & a_{21} \\ a_{33} & a_{32} & a_{31} \end{vmatrix} = a_{13}\begin{vmatrix} a_{22} & a_{21} \\ a_{32} & a_{31} \end{vmatrix} - a_{12}\begin{vmatrix} a_{23} & a_{21} \\ a_{33} & a_{31} \end{vmatrix} + a_{11}\begin{vmatrix} a_{23} & a_{22} \\ a_{33} & a_{32} \end{vmatrix}$$

$$= -a_{11}\begin{vmatrix} a_{22} & a_{23} \\ a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} + a_{12}\begin{vmatrix} a_{21} & a_{23} \\ a_{31} & a_{33} \end{vmatrix} - a_{13}\begin{vmatrix} a_{21} & a_{22} \\ a_{31} & a_{32} \end{vmatrix} = -|A|$$

(3) 2 つの列が等しい行列式の値は 0.

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} & a_{22} \\ a_{31} & a_{32} & a_{32} \end{vmatrix} = a_{11}\begin{vmatrix} a_{22} & a_{22} \\ a_{32} & a_{32} \end{vmatrix} - a_{12}\begin{vmatrix} a_{21} & a_{22} \\ a_{31} & a_{32} \end{vmatrix} + a_{12}\begin{vmatrix} a_{21} & a_{22} \\ a_{31} & a_{32} \end{vmatrix} = 0$$

(i) $\begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 1 & 5 \\ 1 & 2 & 3 \end{vmatrix} = 0$

((1) より列に関する性質は行に関しても成り立つ. いま同じ行があるので値は 0)

(4) 行列式のある列を k 倍すると, 行列式の値は k 倍になる.

$$\begin{vmatrix} ka_{11} & a_{12} & a_{13} \\ ka_{21} & a_{22} & a_{23} \\ ka_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} = ka_{11}\begin{vmatrix} a_{22} & a_{23} \\ a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} - a_{12}\begin{vmatrix} ka_{21} & a_{23} \\ ka_{31} & a_{33} \end{vmatrix} + a_{13}\begin{vmatrix} ka_{21} & a_{22} \\ ka_{31} & a_{32} \end{vmatrix}$$

$$= ka_{11}\begin{vmatrix} a_{22} & a_{23} \\ a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} - ka_{12}\begin{vmatrix} a_{21} & a_{23} \\ a_{31} & a_{33} \end{vmatrix} + ka_{13}\begin{vmatrix} a_{21} & a_{22} \\ a_{31} & a_{32} \end{vmatrix} = k|A|$$

(ii) $\begin{vmatrix} 4 & 1 & 2 \\ 1 & 1 & 1 \\ 8 & 2 & 4 \end{vmatrix} = 2\begin{vmatrix} 4 & 1 & 2 \\ 1 & 1 & 1 \\ 4 & 1 & 2 \end{vmatrix} = 0$

(5) ある列の要素が二つの数の和からなる行列の行列式は, 他の列はそのままにして, その列の要素を 2 組に分けてできる 2 つの行列式の値の和に等しい.

$$\begin{vmatrix} a_{11}+b_1 & a_{12} & a_{13} \\ a_{21}+b_2 & a_{22} & a_{23} \\ a_{31}+b_3 & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a_{11}+b_1 & a_{21}+b_2 & a_{31}+b_3 \\ a_{12} & a_{22} & a_{32} \\ a_{13} & a_{23} & a_{33} \end{vmatrix}$$

$$= (a_{11}+b_1)\begin{vmatrix} a_{22} & a_{32} \\ a_{23} & a_{33} \end{vmatrix} - (a_{12}+b_2)\begin{vmatrix} a_{12} & a_{32} \\ a_{13} & a_{33} \end{vmatrix} + (a_{13}+b_3)\begin{vmatrix} a_{12} & a_{22} \\ a_{13} & a_{23} \end{vmatrix}$$

$$= \begin{vmatrix} a_{11} & a_{21} & a_{31} \\ a_{12} & a_{22} & a_{32} \\ a_{13} & a_{23} & a_{33} \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} b_1 & b_2 & b_3 \\ a_{12} & a_{22} & a_{32} \\ a_{13} & a_{23} & a_{33} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} b_1 & a_{12} & a_{13} \\ b_2 & a_{22} & a_{23} \\ b_3 & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}$$

(6) ある列の k 倍を他の列に足しても行列式の値は変わらない.

$$\begin{vmatrix} a_{11}+ka_{12} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21}+ka_{22} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31}+ka_{32} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} ka_{12} & a_{12} & a_{13} \\ ka_{22} & a_{22} & a_{23} \\ ka_{32} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} = |A| + k\begin{vmatrix} a_{12} & a_{12} & a_{13} \\ a_{22} & a_{22} & a_{23} \\ a_{32} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} = |A|$$

1. 次の行列式の値をそれぞれ指定された方法でを求めよ.

(1) 定義より直接 $\begin{vmatrix} 2 & 0 & 3 \\ 0 & 0 & 2 \\ 1 & 1 & 1 \end{vmatrix} = 2\begin{vmatrix} 0 & 2 \\ 1 & 1 \end{vmatrix} - 0\begin{vmatrix} 0 & 2 \\ 1 & 1 \end{vmatrix} + 3\begin{vmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 1 \end{vmatrix} = 2(0-2) - 0 + 0 = -4$

(2) 基本変形により $\begin{vmatrix} 2 & 0 & 3 \\ 0 & 0 & 2 \\ 1 & 1 & 1 \end{vmatrix} = -\begin{vmatrix} 3 & 0 & 2 \\ 2 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 3 & 0 & 2 \\ 1 & 1 & 1 \end{vmatrix} = 2\begin{vmatrix} 0 & 2 \\ 1 & 1 \end{vmatrix} = -4$

(3) 定義より直接 $\begin{vmatrix} 1 & 5 & 2 \\ 4 & -3 & 6 \\ -1 & 2 & 1 \end{vmatrix} = 1\begin{vmatrix} -3 & 6 \\ 2 & 1 \end{vmatrix} - 5\begin{vmatrix} 4 & 6 \\ -1 & 1 \end{vmatrix} + 2\begin{vmatrix} 4 & -3 \\ -1 & 2 \end{vmatrix}$

$$= (-3-12) - 5(4+6) + 2(8-3) = -15 - 50 + 10 = -55$$

(4) 基本変形により $\begin{vmatrix} 1 & 5 & 2 \\ 4 & -3 & 6 \\ -1 & 2 & 1 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 5 & 2 \\ 0 & -23 & -2 \\ 0 & 7 & 3 \end{vmatrix} = 1\begin{vmatrix} -23 & -2 \\ 7 & 3 \end{vmatrix} = -69 + 14 = -55$

2. 次の等式の成り立つことを示せ

$$\begin{vmatrix} a & a^2 & b+c \\ b & b^2 & c+a \\ c & c^2 & a+b \end{vmatrix} = (a+b+c)(a-b)(b-c)(c-a)$$

(証明例) 基本変形を用いる

$$\begin{vmatrix} a & a^2 & b+c \\ b & b^2 & c+a \\ c & c^2 & a+b \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a & a^2 & (b+c)+a \\ b & b^2 & (c+a)+b \\ c & c^2 & (a+b)+c \end{vmatrix} = (a+b+c)\begin{vmatrix} a & a^2 & 1 \\ b & b^2 & 1 \\ c & c^2 & 1 \end{vmatrix} = (a+b+c)\begin{vmatrix} a & a^2 & 1 \\ b-a & b^2-a^2 & 0 \\ c-a & c^2-a^2 & 0 \end{vmatrix}$$

$$= (a+b+c)\begin{vmatrix} b-a & (b-a)(b+a) \\ c-a & (c-a)(c+a) \end{vmatrix} = (a+b+c)(b-a)(c-a)\begin{vmatrix} 1 & b+a \\ 1 & c+a \end{vmatrix}$$

$$= (a+b+c)(b-a)(c-a)\{(c+a)-(b+a)\} = (a+b+c)(a-b)(b-c)(c-a)$$

感想・要望など