線形代数 I　第 5 回練習問題　(担当: 関口 良行)

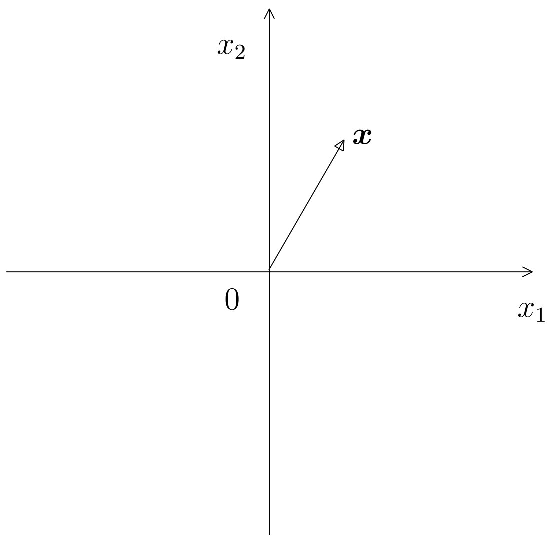
所属: ＿＿＿＿＿＿　学籍番号: ＿＿＿＿＿＿　氏名: ＿＿＿＿＿＿

1. 次の変換で, $\boldsymbol{x} = \begin{bmatrix} 1/2 \\ \sqrt{3}/2 \end{bmatrix}$ が移る先を求め, 図示せよ.

   (1) x_1 軸に対する折り返し
   $\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix}$

   (2) (1) で得た点をさらに, $\pi/3$ 回転
   $\begin{bmatrix} \cos(\pi/3) & -\sin(\pi/3) \\ \sin(\pi/3) & \cos(\pi/3) \end{bmatrix}$

   (3) $\boldsymbol{x}$ を「$\pi/3$ 回転」 → 「x_1 軸に対しての折り返し」の順で変換したとき.



2. 問 1 の変換について

   (1) 「x_1 軸に対する折り返し」 → 「$\pi/3$ 回転」という合成変換を表す行列を求めよ.

   (2) 「$\pi/3$ 回転」 → 「x_1 軸に対する折り返し」という合成変換を表す行列を求めよ.

3. ベクトル $\boldsymbol{p} = \begin{bmatrix} 2 \\ 1 \end{bmatrix}, \boldsymbol{q} = \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \end{bmatrix}$ と行列 $M = \begin{bmatrix} 2 & 4 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}$ に対して, 以下の問いに答えよ.

   (1) ベクトル $\boldsymbol{p}, \boldsymbol{q}$ で張られる平行四辺形の面積を求めよ.

   (2) ベクトル $M\boldsymbol{p}, M\boldsymbol{q}$ で張られる平行四辺形の面積を求めよ. また, ベクトル $\boldsymbol{p}, \boldsymbol{q}$ で張られる平行四辺形が, M による変換で裏返されるかどうか判定せよ.

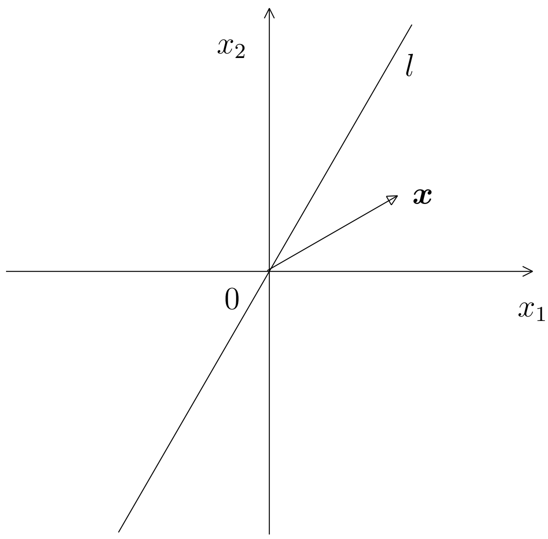
(3) 行列 $A = \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}, X = \begin{bmatrix} x & y \\ z & w \end{bmatrix}$ について, $\det(AX) = \det A \det X$ を示せ (左辺を計算して右辺に等しいことを示せ).

(4) 上の関係式を $A = M$, $X = \begin{bmatrix} \boldsymbol{p} & \boldsymbol{q} \end{bmatrix}$ と代入し, 確かめよ. この関係式から面積と, 一次変換を表す行列の行列式との関係について言えることを述べよ.

4. 直線 l: $x_2 = \sqrt{3}x_1$ と点 $\boldsymbol{x} = \begin{bmatrix} \sqrt{3}/2 \\ 1/2 \end{bmatrix}$ が以下の変換 (1) → (2) → (3) の順に変換されるとき, それぞれの移動先を求め, 図示せよ.

(1) $(-\pi/3)$ 回転

(2) x_1 軸に対する折り返し



(3) $\pi/3$ 回転

5. 問 4 の (1) → (2) → (3) という順番の合成変換を表す行列を求めよ. またこの合成変換はどのような変換を表すか述べよ.

感想・要望など