線形代数 I 第 5 回練習問題 (担当: 関口 良行)

所属: __________ 学籍番号: __________ 氏名: __________

1. 次の変換で, $\boldsymbol{x} = \begin{bmatrix} 1/2 \\ \sqrt{3}/2 \end{bmatrix}$ が移る先を求め, 図示せよ.

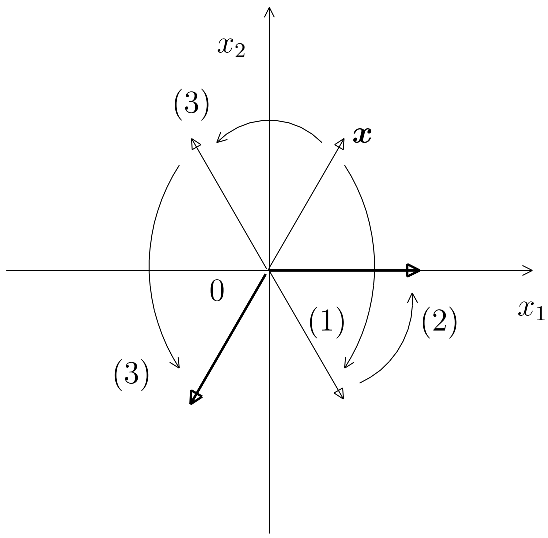
(1) x_1 軸に対する折り返し

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1/2 \\ \sqrt{3}/2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1/2 \\ -\sqrt{3}/2 \end{bmatrix}$$

(2) (1) で得た点をさらに, $\pi/3$ 回転

$$\begin{bmatrix} \cos(\pi/3) & -\sin(\pi/3) \\ \sin(\pi/3) & \cos(\pi/3) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1/2 \\ -\sqrt{3}/2 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} 1/2 & -\sqrt{3}/2 \\ \sqrt{3}/2 & 1/2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1/2 \\ -\sqrt{3}/2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix}$$



(3) $\boldsymbol{x}$ を「$\pi/3$ 回転」 → 「x_1 軸に対しての折り返し」の順で変換したとき.

「$\pi/3$ 回転」 $\begin{bmatrix} 1/2 & -\sqrt{3}/2 \\ \sqrt{3}/2 & 1/2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1/2 \\ \sqrt{3}/2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -1/2 \\ \sqrt{3}/2 \end{bmatrix}$

「x_1 軸に対しての折り返し」

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -1/2 \\ \sqrt{3}/2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -1/2 \\ -\sqrt{3}/2 \end{bmatrix}$$

2. 問 1 の変換について

(1) 「x_1 軸に対する折り返し」 → 「$\pi/3$ 回転」という合成変換を表す行列を求めよ.

$$\begin{bmatrix} 1/2 & -\sqrt{3}/2 \\ \sqrt{3}/2 & 1/2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1/2 & \sqrt{3}/2 \\ \sqrt{3}/2 & -1/2 \end{bmatrix}$$

(2) 「$\pi/3$ 回転」 → 「x_1 軸に対する折り返し」という合成変換を表す行列を求めよ.

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1/2 & -\sqrt{3}/2 \\ \sqrt{3}/2 & 1/2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1/2 & -\sqrt{3}/2 \\ -\sqrt{3}/2 & -1/2 \end{bmatrix}$$

3. ベクトル $\boldsymbol{p} = \begin{bmatrix} 2 \\ 1 \end{bmatrix}, \boldsymbol{q} = \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \end{bmatrix}$ と行列 $M = \begin{bmatrix} 2 & 4 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}$ に対して, 以下の問いに答えよ.

(1) ベクトル $\boldsymbol{p}, \boldsymbol{q}$ で張られる平行四辺形の面積を求めよ.

$$面積 = |\det \begin{bmatrix} \boldsymbol{p} & \boldsymbol{q} \end{bmatrix}| = |2 \cdot 2 - 1 \cdot 1| = 3$$

(2) ベクトル $M\boldsymbol{p}, M\boldsymbol{q}$ で張られる平行四辺形の面積を求めよ. また, ベクトル $\boldsymbol{p}, \boldsymbol{q}$ で張られる平行四辺形が, M による変換で裏返されるかどうか判定せよ.

$$M\boldsymbol{p} = \begin{bmatrix} 8 \\ 3 \end{bmatrix}, \quad M\boldsymbol{q} = \begin{bmatrix} 10 \\ 3 \end{bmatrix}, \quad 面積 = |\det \begin{bmatrix} M\boldsymbol{p} & M\boldsymbol{q} \end{bmatrix}| = |8 \cdot 3 - 10 \cdot 3| = |-6| = 6$$

行列式の符号は $\det \begin{bmatrix} \boldsymbol{p} & \boldsymbol{q} \end{bmatrix} > 0$, $\det \begin{bmatrix} M\boldsymbol{p} & M\boldsymbol{q} \end{bmatrix} < 0$ なので, 変換 M により平行四辺形は裏返しになっている.

(3) 行列 $A = \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}, X = \begin{bmatrix} x & y \\ z & w \end{bmatrix}$ について, $\det(AX) = \det A \det X$ を示せ (左辺を計算して右辺に等しいことを示せ).

$$\det(AX) = \det \begin{bmatrix} ax+bz & ay+bw \\ cx+dz & cy+dw \end{bmatrix} = (ax+bz)(cy+dw) - (ay+bw)(cx+dz)$$
$$= (ad-bc)xw - (ad-bc)zy = (ad-bc)(xw-zy) = \det A \det X.$$

(4) 上の関係式を $A = M$, $X = \begin{bmatrix} \boldsymbol{p} & \boldsymbol{q} \end{bmatrix}$ と代入し, 確かめよ. この関係式から面積と, 一次変換を表す行列の行列式との関係について言えることを述べよ.

(解答例) $\det(M\begin{bmatrix} \boldsymbol{p} & \boldsymbol{q} \end{bmatrix}) = -6, \det M = -2, \det \begin{bmatrix} \boldsymbol{p} & \boldsymbol{q} \end{bmatrix}$ なので, 確かに $\det(M\begin{bmatrix} \boldsymbol{p} & \boldsymbol{q} \end{bmatrix}) = \det M \det \begin{bmatrix} \boldsymbol{p} & \boldsymbol{q} \end{bmatrix}$ が成り立っている.

また, 絶対値をとると $|\det(AX)| = |\det A||\det X|$ となる. よって, 平行四辺形を, 行列 A で変換すると, 変換後の面積は変換前の面積の $|\det A|$ 倍になる.

4. 直線 l: $x_2 = \sqrt{3}x_1$ と点 $\boldsymbol{x} = \begin{bmatrix} \sqrt{3}/2 \\ 1/2 \end{bmatrix}$ が以下の変換 (1) → (2) → (3) の順に変換されるとき, それぞれの移動先を求め, 図示せよ.

(1) $(-\pi/3)$ 回転

直線 l はパラメータ t を用いて, $x_1 = t$ とおくと, $\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} = t \begin{bmatrix} 1 \\ \sqrt{3} \end{bmatrix}$ と書ける. これを $(-\pi/3)$ 回転すると, $\begin{bmatrix} 1/2 & \sqrt{3}/2 \\ -\sqrt{3}/2 & 1/2 \end{bmatrix} \left(t \begin{bmatrix} 1 \\ \sqrt{3} \end{bmatrix} \right) = t \begin{bmatrix} 2 \\ 0 \end{bmatrix}$. よって直線 l の変換先 l' は x_1 軸. また, $\boldsymbol{x}$ は $\boldsymbol{x}' = \begin{bmatrix} \sqrt{3}/2 \\ -1/2 \end{bmatrix}$ に移される.

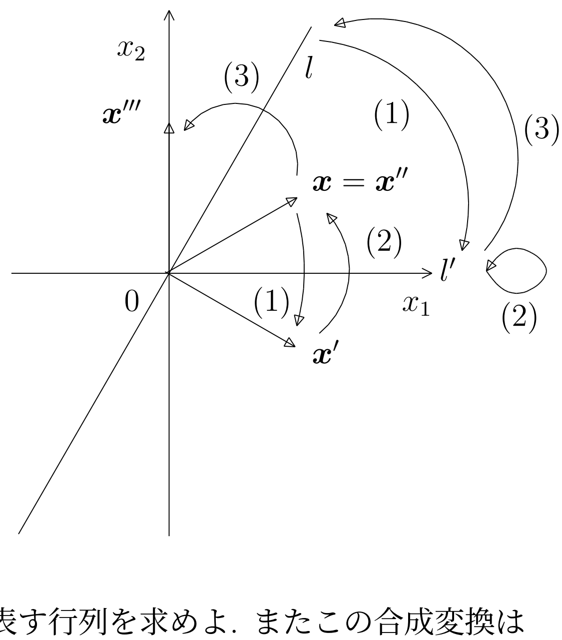
(2) x_1 軸に対する折り返し $\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix}$

(1) と同様にすると, l' は動かず, $\boldsymbol{x}'$ は $\boldsymbol{x}'' = \begin{bmatrix} \sqrt{3}/2 \\ 1/2 \end{bmatrix}$ に移される.

(3) $\pi/3$ 回転

l' は l に移り, $\boldsymbol{x}''$ は,

$\boldsymbol{x}''' = \begin{bmatrix} 1/2 & -\sqrt{3}/2 \\ \sqrt{3}/2 & 1/2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \sqrt{3}/2 \\ 1/2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix}$ に移される.



5. 問 4 の (1) → (2) → (3) という順番の合成変換を表す行列を求めよ. またこの合成変換はどのような変換を表すか述べよ.

$$\begin{bmatrix} 1/2 & -\sqrt{3}/2 \\ \sqrt{3}/2 & 1/2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1/2 & \sqrt{3}/2 \\ -\sqrt{3}/2 & 1/2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -1/2 & \sqrt{3}/2 \\ \sqrt{3}/2 & 1/2 \end{bmatrix}.$$

合成変換は, 直線 l に関する折り返しを表す.