# 線形代数 I　第 6 回練習問題　(担当: 関口 良行)

所属: ________　学籍番号: ________　氏名: ________

1. $A = \begin{bmatrix} 2 & 0 \\ -1 & 1 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}, B = \begin{bmatrix} 1 & 2 & -1 \\ 3 & 1 & 0 \end{bmatrix}, \boldsymbol{x} = \begin{bmatrix} 1 \\ 3 \end{bmatrix}, \boldsymbol{y} = \begin{bmatrix} 2 \\ -1 \\ 0 \end{bmatrix}$ のとき, 次を計算せよ.

(1) $A\boldsymbol{x}$

$$\begin{bmatrix} 2 & 0 \\ -1 & 1 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 \\ 3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 \cdot 1 + 0 \cdot 3 \\ -1 \cdot 1 + 1 \cdot 3 \\ 0 \cdot 1 + 1 \cdot 3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 \\ 2 \\ 3 \end{bmatrix}$$

(2) $AB$

$$\begin{bmatrix} 2 & 0 \\ -1 & 1 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 2 & -1 \\ 3 & 1 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 \cdot 1 + 0 \cdot 3 & 2 \cdot 2 + 0 \cdot 1 & 2 \cdot (-1) + 0 \cdot 0 \\ -1 \cdot 1 + 1 \cdot 3 & -1 \cdot 2 + 1 \cdot 1 & -1 \cdot (-1) + 1 \cdot 0 \\ 0 \cdot 1 + 1 \cdot 3 & 0 \cdot 2 + 1 \cdot 1 & 0 \cdot (-1) + 1 \cdot 0 \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} 2 & 4 & -2 \\ 2 & -1 & 1 \\ 3 & 1 & 0 \end{bmatrix}$$

(3) $B\boldsymbol{y}$

$$\begin{bmatrix} 1 & 2 & -1 \\ 3 & 1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 2 \\ -1 \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \cdot 2 + 2 \cdot (-1) + (-1) \cdot 0 \\ 3 \cdot 2 + 1 \cdot (-1) + 0 \cdot 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 5 \end{bmatrix}$$

(4) $BA$

$$\begin{bmatrix} 1 & 2 & -1 \\ 3 & 1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 2 & 0 \\ -1 & 1 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \cdot 2 + 2 \cdot (-1) + (-1) \cdot 0 & 1 \cdot 0 + 2 \cdot 1 + (-1) \cdot 1 \\ 3 \cdot 2 + 1 \cdot (-1) + 0 \cdot 0 & 3 \cdot 0 + 1 \cdot 1 + 0 \cdot 1 \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 5 & 1 \end{bmatrix}$$

2. $A = \begin{bmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 4 & 6 & 3 \\ 8 & 8 & 9 \end{bmatrix}, P_1 = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -2 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}, P_2 = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ -4 & 0 & 1 \end{bmatrix}$ のとき, 次を計算せよ. 計算結果から, $P_1, P_2$ がそれぞれ行列 $A$, $P_1 A$ をどのように変形するか考察せよ.

(1) $P_1 A$

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -2 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 4 & 6 & 3 \\ 8 & 8 & 9 \end{bmatrix}$$
$$= \begin{bmatrix} 1 \cdot 2 + 0 \cdot 4 + 0 \cdot 8 & 1 \cdot 1 + 0 \cdot 6 + 0 \cdot 8 & 1 \cdot 1 + 0 \cdot 3 + 0 \cdot 9 \\ (-2) \cdot 2 + 1 \cdot 4 + 0 \cdot 8 & (-2) \cdot 1 + 1 \cdot 6 + 0 \cdot 8 & (-2) \cdot 1 + 1 \cdot 3 + 0 \cdot 9 \\ 0 \cdot 2 + 0 \cdot 4 + 1 \cdot 8 & 0 \cdot 1 + 0 \cdot 6 + 1 \cdot 8 & 0 \cdot 1 + 0 \cdot 3 + 1 \cdot 9 \end{bmatrix}$$
$$= \begin{bmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 0 & 4 & 1 \\ 8 & 8 & 9 \end{bmatrix}$$

(考察例) 2 行 から 1 行の 2 倍を引く.

(2) $P_2(P_1 A)$

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ -4 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 0 & 4 & 1 \\ 8 & 8 & 9 \end{bmatrix}$$
$$= \begin{bmatrix} 1 \cdot 2 + 0 \cdot 0 + 0 \cdot 8 & 1 \cdot 1 + 0 \cdot 4 + 0 \cdot 8 & 1 \cdot 1 + 0 \cdot 1 + 0 \cdot 9 \\ 0 \cdot 2 + 1 \cdot 0 + 0 \cdot 8 & 0 \cdot 1 + 1 \cdot 4 + 0 \cdot 8 & 0 \cdot 1 + 1 \cdot 1 + 0 \cdot 9 \\ (-4) \cdot 2 + 0 \cdot 0 + 1 \cdot 8 & (-4) \cdot 1 + 0 \cdot 4 + 1 \cdot 8 & (-4) \cdot 1 + 0 \cdot 1 + 1 \cdot 9 \end{bmatrix}$$
$$= \begin{bmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 0 & 4 & 1 \\ 0 & 4 & 5 \end{bmatrix}$$

(考察例) 3 行から 1 行の 4 倍を引く.

3. ベクトル $\boldsymbol{p} = \begin{bmatrix} 2 \\ 1 \end{bmatrix}, \boldsymbol{q} = \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \end{bmatrix}$ と行列 $M = \begin{bmatrix} 2 & 4 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}$ に対して, 以下の問いに答えよ.

(1) ベクトル $\boldsymbol{p}, \boldsymbol{q}$ で張られる平行四辺形の面積を求めよ.

$$\text{面積} = |\det \begin{bmatrix} \boldsymbol{p} & \boldsymbol{q} \end{bmatrix}| = |2 \cdot 2 - 1 \cdot 1| = 3$$

(2) ベクトル $M\boldsymbol{p}, M\boldsymbol{q}$ で張られる平行四辺形の面積を求めよ. また, ベクトル $\boldsymbol{p}, \boldsymbol{q}$ で張られる平行四辺形が, $M$ による変換で裏返されるかどうか判定せよ.

$$M\boldsymbol{p} = \begin{bmatrix} 8 \\ 3 \end{bmatrix}, \quad M\boldsymbol{q} = \begin{bmatrix} 10 \\ 3 \end{bmatrix}, \quad \text{面積} = |\det \begin{bmatrix} M\boldsymbol{p} & M\boldsymbol{q} \end{bmatrix}| = |8 \cdot 3 - 10 \cdot 3| = |-6| = 6$$

行列式の符号は $\det \begin{bmatrix} \boldsymbol{p} & \boldsymbol{q} \end{bmatrix} > 0$, $\det \begin{bmatrix} M\boldsymbol{p} & M\boldsymbol{q} \end{bmatrix} < 0$ なので, 変換 $M$ により平行四辺形は裏返しになっている.

(3) 行列 $A = \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}, X = \begin{bmatrix} x & y \\ z & w \end{bmatrix}$ について, $\det(AX) = \det A \det X$ を示せ (左辺を計算して右辺に等しいことを示せ).

$$\begin{aligned}\det(AX) = \det \begin{bmatrix} ax+bz & ay+bw \\ cx+dz & cy+dw \end{bmatrix} &= (ax+bz)(cy+dw) - (ay+bw)(cx+dz) \\ &= (ad-bc)xw - (ad-bc)zy = (ad-bc)(xw-zy) = \det A \det X.\end{aligned}$$

(4) 上の関係式を $A = M$, $X = \begin{bmatrix} \boldsymbol{p} & \boldsymbol{q} \end{bmatrix}$ と代入し, 確かめよ. この関係式から面積と, 一次変換を表す行列の行列式との関係について言えることを述べよ.

(解答例) $\det(M\begin{bmatrix} \boldsymbol{p} & \boldsymbol{q} \end{bmatrix}) = -6, \det M = -2, \det \begin{bmatrix} \boldsymbol{p} & \boldsymbol{q} \end{bmatrix}$ なので, 確かに $\det(M\begin{bmatrix} \boldsymbol{p} & \boldsymbol{q} \end{bmatrix}) = \det M \det \begin{bmatrix} \boldsymbol{p} & \boldsymbol{q} \end{bmatrix}$ が成り立っている.

また, 絶対値をとると $|\det(AX)| = |\det A||\det X|$ となる. よって, 平行四辺形を, 行列 $A$ で変換すると, 変換後の面積は変換前の面積の $|\det A|$ 倍になる.