線形代数 I 第 7 回練習問題 (担当: 関口 良行)

所属: ＿＿＿＿＿＿　学籍番号: ＿＿＿＿＿＿　氏名: ＿＿＿＿＿＿

注意: 今回は計算量が多いので, 途中計算はノートを使い大きな文字で計算すること

1. 次の行列の逆行列を基本変形を用いて求めよ. また結果を元の行列に掛けて検算せよ.

(1) $\begin{bmatrix} 1 & 0 & -3 \\ 0 & 1 & 0 \\ 2 & 1 & -5 \end{bmatrix}$

(解答) $\begin{bmatrix} 1 & 0 & -3 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 2 & 1 & -5 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \xrightarrow{3\text{ 行}+1\text{ 行}\times(-2)} \begin{bmatrix} 1 & 0 & -3 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & -2 & 0 & 1 \end{bmatrix} \xrightarrow{3\text{ 行}-2\text{ 行}}$

$\begin{bmatrix} 1 & 0 & -3 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -2 & -1 & 1 \end{bmatrix} \xrightarrow{1\text{ 行}+3\text{ 行}\times 3} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & -5 & -3 & 3 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -2 & -1 & 1 \end{bmatrix}$

答え $\begin{bmatrix} -5 & -3 & 3 \\ 0 & 1 & 0 \\ -2 & -1 & 1 \end{bmatrix}$

(2) $\begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 4 & 5 \\ 3 & 5 & 6 \end{bmatrix}$

(解答) $\begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 & 1 & 0 & 0 \\ 2 & 4 & 5 & 0 & 1 & 0 \\ 3 & 5 & 6 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \xrightarrow{2\text{ 行}+1\text{ 行}\times(-2)} \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & -2 & 1 & 0 \\ 3 & 5 & 6 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \xrightarrow{3\text{ 行}+1\text{ 行}\times(-3)}$

$\begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & -2 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & -3 & -3 & 0 & 1 \end{bmatrix} \xrightarrow{2\text{ 行と }3\text{ 行を交換}} \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & -3 & -3 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & -1 & -2 & 1 & 0 \end{bmatrix} \xrightarrow{2\text{ 行}+3\text{ 行}\times(-3)}$

$\begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 3 & -3 & 1 \\ 0 & 0 & -1 & -2 & 1 & 0 \end{bmatrix} \xrightarrow{1\text{ 行}+3\text{ 行}\times 3} \begin{bmatrix} 1 & 2 & 0 & -5 & 3 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 3 & -3 & 1 \\ 0 & 0 & -1 & -2 & 1 & 0 \end{bmatrix} \xrightarrow{1\text{ 行}+2\text{ 行}\times 2}$

$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 1 & -3 & 2 \\ 0 & -1 & 0 & 3 & -3 & 1 \\ 0 & 0 & -1 & -2 & 1 & 0 \end{bmatrix} \xrightarrow[3\text{ 行}\times(-1)]{2\text{ 行}\times(-1)} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 1 & -3 & 2 \\ 0 & 1 & 0 & -3 & 3 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & 2 & -1 & 0 \end{bmatrix}$

答え $\begin{bmatrix} 1 & -3 & 2 \\ -3 & 3 & -1 \\ 2 & -1 & 0 \end{bmatrix}$

2. ある行列に, 次の行列を左から掛けることに対応する基本変形を述べ, その逆行列を計算せずに求めよ.

(1) $\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & k & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$ $(k \neq 0)$ 答え 2 行を k 倍する. 逆行列は $\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1/k & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$

(2) $\begin{bmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$ 答え 1 行に 2 行 $\times(-1)$ を 足す. 逆行列は $\begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$

(3) $\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}$ 答え 2 行と 3 行を交換する. 逆行列は $\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}$

3. (時間があれば) 問 1 (1) の行列に対し, 余因子を使った逆行列の公式を用いて, 逆行列を求めよ.

(解答) 行列を A とすると, 逆行列の公式は

$$A^{-1} = \frac{1}{|A|} \begin{bmatrix} A_{11} & A_{21} & A_{31} \\ A_{12} & A_{22} & A_{32} \\ A_{13} & A_{23} & A_{33} \end{bmatrix}$$

となる. $|A| = 1$ で, 余因子はそれぞれ

$$A_{11} = (-1)^{(1+1)} \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 1 & -5 \end{bmatrix}, \ A_{12} = (-1)^{(1+2)} \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 2 & -5 \end{bmatrix}, A_{13} = (-1)^{(1+3)} \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 2 & 1 \end{bmatrix}$$
$$A_{21} = (-1)^{(2+1)} \begin{bmatrix} 0 & -3 \\ 1 & -5 \end{bmatrix}, A_{22} = (-1)^{(2+2)} \begin{bmatrix} 1 & -3 \\ 2 & -5 \end{bmatrix}, A_{23} = (-1)^{(2+3)} \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 2 & 1 \end{bmatrix}$$
$$A_{31} = (-1)^{(3+1)} \begin{bmatrix} 0 & -3 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}, A_{32} = (-1)^{(3+2)} \begin{bmatrix} 1 & -3 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}, A_{33} = (-1)^{(3+3)} \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$$

なので,

$$A^{-1} = \begin{bmatrix} -5 & -3 & 3 \\ 0 & 1 & 0 \\ -2 & -1 & 1 \end{bmatrix}$$