線形代数 I 第 8 回練習問題 (担当: 関口 良行)

所属: ____________ 学籍番号: ____________ 氏名: ____________

注意: 今回は計算量が多いので, 途中計算はノートを使い大きな文字で計算すること

1. 次の行列式を計算せよ.

(1) $\begin{vmatrix} 3 & 1 & 3 & -2 \\ 1 & -2 & 1 & 3 \\ 2 & 3 & 3 & 2 \\ 1 & 1 & 3 & 4 \end{vmatrix}$

(解答 1) $(2,3)$ 成分を使うと, 3 列が計算しやすいことに注目して, それを $(1,1)$ に移動してから変形

$$\begin{vmatrix} 3 & 1 & 3 & -2 \\ 1 & -2 & 1 & 3 \\ 2 & 3 & 3 & 2 \\ 1 & 1 & 3 & 4 \end{vmatrix} \overset{1\text{ 列 と }3\text{ 列を交換}}{=} (-1)\begin{vmatrix} 3 & 1 & 3 & -2 \\ 1 & -2 & 1 & 3 \\ 3 & 3 & 2 & 2 \\ 3 & 1 & 1 & 4 \end{vmatrix}$$

$$\overset{1\text{ 行 と }2\text{ 行を交換}}{=} (-1)^2\begin{vmatrix} 1 & -2 & 1 & 3 \\ 3 & 1 & 3 & -2 \\ 3 & 3 & 2 & 2 \\ 3 & 1 & 1 & 4 \end{vmatrix} \overset{2\text{ 行 }-1\text{ 行 }\times 3}{=} \begin{vmatrix} 1 & -2 & 1 & 3 \\ 0 & 7 & 0 & -11 \\ 3 & 3 & 2 & 2 \\ 3 & 1 & 1 & 4 \end{vmatrix}$$

$$\overset{\text{同様にして}}{=} \begin{vmatrix} 1 & -2 & 1 & 3 \\ 0 & 7 & 0 & -11 \\ 0 & 9 & -1 & -7 \\ 0 & 7 & -2 & -5 \end{vmatrix} \overset{\text{定義式}}{=} \begin{vmatrix} 7 & 0 & -11 \\ 9 & -1 & -7 \\ 7 & -2 & -5 \end{vmatrix} \overset{3\text{ 次行列式の計算}}{=} \cdots = 58$$

(解答 2) 余因子展開を使う. $(2,3)$ 成分に注目して, 3 列の他の成分を 0 にする.

$$\begin{vmatrix} 3 & 1 & 3 & -2 \\ 1 & -2 & 1 & 3 \\ 2 & 3 & 3 & 2 \\ 1 & 1 & 3 & 4 \end{vmatrix} \overset{1\text{ 行 }-2\text{ 行 }\times 3}{=} \begin{vmatrix} 0 & 7 & 0 & -11 \\ 1 & -2 & 1 & 3 \\ 2 & 3 & 3 & 2 \\ 1 & 1 & 3 & 4 \end{vmatrix} \overset{\text{他の行も同様にして}}{=} \begin{vmatrix} 0 & 7 & 0 & -11 \\ 1 & -2 & 1 & 3 \\ -1 & 9 & 0 & -7 \\ -2 & 7 & 0 & -5 \end{vmatrix}$$

$$\overset{3\text{ 列で余因子展開}}{=} (-1)^{2+3}\cdot 1\cdot \begin{vmatrix} 0 & 7 & -11 \\ -1 & 9 & -7 \\ -2 & 7 & -5 \end{vmatrix} \overset{\substack{(2,1)\text{ 成分に注目して} \\ 3\text{ 行 }-1\text{ 行 }\times 2}}{=} (-1)\begin{vmatrix} 0 & 7 & -11 \\ -1 & 9 & -7 \\ 0 & -11 & 9 \end{vmatrix}$$

$$\overset{1\text{ 列で余因子展開}}{=} (-1)(-1)^{2+1}(-1)\begin{vmatrix} 7 & -11 \\ -11 & 9 \end{vmatrix} = (-1)(63-121) = 58$$

(解答 3) (解答 2) において, 3 列にゼロを増やすときに, “3 行 − 1 行” → “4 行 − 1 行” として $(3,3), (4,3)$ 成分をゼロにしてから “1 行 − 2 行 ×3” をする.

答え 58

(2) $\begin{vmatrix} 3 & 1 & 2 & 2 \\ 3 & 2 & 1 & 3 \\ 3 & 3 & 0 & 0 \\ 5 & 4 & 0 & 1 \end{vmatrix}$

(解答例) 余因子展開を使う. 数字の並びをみて工夫する

$$\begin{vmatrix} 3 & 1 & 2 & 2 \\ 3 & 2 & 1 & 3 \\ 3 & 3 & 0 & 0 \\ 5 & 4 & 0 & 1 \end{vmatrix} \overset{1\text{ 列}-2\text{ 列}}{=} \begin{vmatrix} 2 & 1 & 2 & 2 \\ 1 & 2 & 1 & 3 \\ 0 & 3 & 0 & 0 \\ 1 & 4 & 0 & 1 \end{vmatrix} \overset{3\text{ 行で余因子展開}}{=} (-1)^{3+2}3\begin{vmatrix} 2 & 2 & 2 \\ 1 & 1 & 3 \\ 1 & 0 & 1 \end{vmatrix}$$

$$\overset{1\text{ 列}-2\text{ 列}}{=} (-3)\begin{vmatrix} 0 & 2 & 2 \\ 0 & 1 & 3 \\ 1 & 0 & 1 \end{vmatrix} \overset{1\text{ 列で余因子展開}}{=} (-3)(-1)^{3+1}\cdot 1\cdot \begin{vmatrix} 2 & 2 \\ 1 & 3 \end{vmatrix} = (-3)(6-2) = -12$$

答え -12

2. 次の行列の逆行列を基本変形を用いて求めよ. また結果を元の行列に掛けて検算せよ.

(1) $\begin{bmatrix} -1 & 1 & 0 \\ 1 & -1 & 1 \\ 0 & 1 & -1 \end{bmatrix}$ (解答) 行に関してのみ基本変形を行う.

$$\begin{bmatrix} -1 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & -1 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \xrightarrow{2\text{ 行}+1\text{ 行}} \begin{bmatrix} -1 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \xrightarrow{2\text{ 行 と }3\text{ 行を入れ替える}}$$

$$\begin{bmatrix} -1 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 1 & 0 \end{bmatrix} \xrightarrow{2\text{ 行}+3\text{ 行}} \begin{bmatrix} -1 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 1 & 0 \end{bmatrix}$$

$$\xrightarrow{1\text{ 行}-2\text{ 行}} \begin{bmatrix} -1 & 0 & 0 & 0 & -1 & -1 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 1 & 0 \end{bmatrix} \xrightarrow{1\text{ 行}\times(-1)} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 1 & 0 \end{bmatrix}$$

答え $\begin{bmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{bmatrix}$

(2) $\begin{bmatrix} 3 & 2 & 6 \\ 1 & 1 & 2 \\ 2 & 2 & 0 \end{bmatrix}$ (解答)

$$\left[\begin{matrix} 3 & 2 & 6 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 2 & 0 & 1 & 0 \\ 2 & 2 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{matrix}\right] \xrightarrow{\text{1 行 と 2 行を入れ替える}} \left[\begin{matrix} 1 & 1 & 2 & 0 & 1 & 0 \\ 3 & 2 & 6 & 1 & 0 & 0 \\ 2 & 2 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{matrix}\right] \xrightarrow[\text{3 行 − 1 行 ×2}]{\text{2 行 − 1 行 ×3}}$$

$$\left[\begin{matrix} 1 & 1 & 2 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 1 & -3 & 0 \\ 0 & 0 & -4 & 0 & -2 & 1 \end{matrix}\right] \xrightarrow[\text{2 行 ×(−1)}]{\text{3 行 ×(−1/4)}} \left[\begin{matrix} 1 & 1 & 2 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & -1 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 1/2 & -1/4 \end{matrix}\right] \xrightarrow{\text{1 行 − 3 行 ×2}}$$

$$\left[\begin{matrix} 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1/2 \\ 0 & 1 & 0 & -1 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 1/2 & -1/4 \end{matrix}\right] \xrightarrow{\text{1 行 − 2 行}} \left[\begin{matrix} 1 & 0 & 0 & 1 & -3 & 1/2 \\ 0 & 1 & 0 & -1 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 1/2 & -1/4 \end{matrix}\right]$$

$$\text{答え} \begin{bmatrix} 1 & -3 & \frac{1}{2} \\ -1 & 3 & 0 \\ 0 & \frac{1}{2} & -\frac{1}{4} \end{bmatrix}$$

3. (時間があれば) 次の行列式と逆行列を求めよ.

(1)

$$\begin{vmatrix} 0 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 0 \end{vmatrix} \overset{\text{1 列に 2, 3, 4, 5 列を足す}}{=} \begin{vmatrix} 4 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 4 & 0 & 1 & 1 & 1 \\ 4 & 1 & 0 & 1 & 1 \\ 4 & 1 & 1 & 0 & 1 \\ 4 & 1 & 1 & 1 & 0 \end{vmatrix} = 4 \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 0 \end{vmatrix}$$

$$= 4 \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -1 \end{vmatrix} = 4 \cdot 1 \cdot (-1)^4 = 4$$

感想・要望など