線形代数 I　期末試験 解答　(2008 年度前期, 担当: 関口 良行)

1. 行列式を計算せよ

(1) $\begin{vmatrix} 2 & 3 & -5 & 3 \\ 2 & 3 & -2 & 0 \\ -1 & -2 & 4 & -3 \\ 5 & 3 & -4 & 3 \end{vmatrix}$　答え 12　　(2) $\begin{vmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1 \end{vmatrix}$　答え 0

2. 逆行列を計算せよ

$$\begin{bmatrix} 2 & 0 & -6 \\ 1 & -2 & 0 \\ -2 & 3 & 2 \end{bmatrix}^{-1}$$

答え $\begin{bmatrix} 2 & 9 & 6 \\ 1 & 4 & 3 \\ \frac{1}{2} & 3 & 2 \end{bmatrix}$

3. 次の連立 1 次方程式 $A\boldsymbol{x} = \boldsymbol{b}$ について答えよ.

$$\begin{cases} 3x - 3y + z - 4w = 2 \\ -2x + 3y - z + 3w = 0 \\ -x + 4y - z + 3w = 3 \\ 3x + z + 2z + 2w = a \end{cases}$$

(1) 連立 1 次方程式が解を持つように a を定めよ.
(解答例) $[A\ \boldsymbol{b}]$ に行に関する基本変形をすると, 一例として

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & -1 & 2 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 2 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & a-5 \end{bmatrix}$$

を得る. 解が存在するとき, $\operatorname{rank} A = \operatorname{rank}[A\ \boldsymbol{b}]$ とならなければならないので, $a = 5$ となる.

(2) $\operatorname{rank} A, \operatorname{rank}[A\ \boldsymbol{b}]$ の値を a について場合分けをして求めよ.
(1) の階段行列を見ると, $a = 5$ の時 $\operatorname{rank} A = \operatorname{rank}[A\ \boldsymbol{b}] = 3$, $a \neq 5$ の時 $\operatorname{rank} A = 3, \operatorname{rank}[A\ \boldsymbol{b}] = 4$ となる.

(3) (1) の a に対して, 解を求めベクトル表示せよ.

$$w = t \text{ とおくと, } \begin{bmatrix} 2 \\ 1 \\ -1 \\ 0 \end{bmatrix} + t \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \\ -2 \\ 1 \end{bmatrix} \text{ (同値な他の表現もある)}$$

4. 連立 1 次方程式が零ベクトル以外の解を持つような a を求めよ.

$$\begin{cases} x + y = 0 \\ 2x + 3y + z = 0 \\ -2x + az = 0 \end{cases}$$

(解答例) まず, 零ベクトル $(x,y,z)=(0,0,0)$ は常に解である. 解が一意であるための必要十分条件は, 係数行列 $A=\begin{bmatrix}1&1&0\\2&3&1\\-2&0&a\end{bmatrix}$ が正則 (逆行列を持つ) になることである. よって, A が正則でなければ (逆行列を持たなければ), 零ベクトル以外の解を持つので, A が正則にならないように a を定める. これは, (i) 行列式 $|A|=0$ や (ii) $\operatorname{rank} A<3$ などと同値である.

(解法 1) 行列式を用いる.

$$A=\begin{vmatrix}1&1&0\\0&1&1\\0&2&a\end{vmatrix}=\begin{vmatrix}1&1\\2&a\end{vmatrix}=a-2$$

なので, (i) より, $a=2$ となる.

(解法 2) 階数を用いる. 基本変形より,

$$A\to\begin{bmatrix}1&1&0\\0&1&1\\0&2&a\end{bmatrix}\to\begin{bmatrix}1&1&0\\0&1&1\\0&0&a-2\end{bmatrix}$$

となるので, (ii) より, $a=2$ となる.

5. 次の連立 1 次方程式について答えよ.

$$\begin{cases}(a+1)x+y=1\\ -2x+(a-1)y=-1\end{cases}$$

(1) 任意の実数 a に対して, 一意の解を持つことを示せ.

(解答例) 係数行列 $\begin{bmatrix}a+1&1\\-2&a-1\end{bmatrix}$ が正則のとき, 解が一意に定まる. また, 行列式が 0 でなければ行列は正則である. ここで, 任意の実数 a に対して, $|A|=a^2-1+2=a^2+1\neq 0$ なので, A は正則である. よって, 解は存在し一意である.

(別解) $|A|\neq 0$ ならば, クラメルの公式が使えるから, としてもよい.

(2) 解 (x,y) が $x\geq 0, y\geq 0$ となる a の条件を求めよ.

(解答例) $|A|\neq 0$ なので, クラメルの公式より,

$$x=\frac{\begin{vmatrix}1&1\\-1&a-1\end{vmatrix}}{|A|}=\frac{a}{a^2+1},\quad y=\frac{\begin{vmatrix}a+1&1\\-2&-1\end{vmatrix}}{|A|}=\frac{-a+1}{a^2+1}$$

よって, $x,y\geq 0$ とすると $0\leq a\leq 1$ を得る.