線形代数 II　期末試験　(2008 年度, 担当: 関口 良行)

計算過程も記述すること

1. 行列の固有値, 固有ベクトルを求めよ.

(1) $\begin{bmatrix} 4 & -6 \\ 1 & -1 \end{bmatrix}$

固有値 1, 固有ベクトル $\begin{bmatrix} 2 \\ 1 \end{bmatrix}$, 固有値 2, 固有ベクトル $\begin{bmatrix} 3 \\ 1 \end{bmatrix}$

(2) $\begin{bmatrix} 1 & -2 & 2 \\ 2 & 6 & -4 \\ 1 & 2 & 0 \end{bmatrix}$

固有値 2 (重解), 固有ベクトル $\begin{bmatrix} -2 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 2 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}$

固有値 3, 固有ベクトル $\begin{bmatrix} -1 \\ 2 \\ 1 \end{bmatrix}$

注意 固有ベクトルは一意でない.

2. シュミットの直交化を用いて, 次のベクトルから正規直交基底を求めよ.

$$\begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} -1 \\ 0 \\ 2 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}$$

(解答例) 左から直交化すると $\frac{1}{\sqrt{2}}\begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}, \frac{1}{3\sqrt{2}}\begin{bmatrix} -1 \\ 1 \\ 4 \end{bmatrix}, \frac{1}{3}\begin{bmatrix} 2 \\ -2 \\ 1 \end{bmatrix}$

3. 対称行列を直交対角化せよ. (行列を A とすると, $P^{-1}AP = D$ となるような, 直交行列 P と 対角行列 D を求めよ)

(1) $\begin{bmatrix} 2 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 2 \end{bmatrix}$

(解答例) $P = \begin{bmatrix} 1/\sqrt{2} & 0 & -1/\sqrt{2} \\ 0 & 1 & 0 \\ 1/\sqrt{2} & 0 & 1/\sqrt{2} \end{bmatrix}, D = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{bmatrix}$

(2) $\begin{bmatrix} -1 & 2 & -2 \\ 2 & 2 & 1 \\ -2 & 1 & 2 \end{bmatrix}$

$$(\text{解答例})\ P = \begin{bmatrix} 2/\sqrt{6} & 1/\sqrt{5} & -2/\sqrt{30} \\ -1/\sqrt{6} & 2/\sqrt{5} & 1/\sqrt{30} \\ 1/\sqrt{6} & 0 & 5/\sqrt{30} \end{bmatrix},\ D = \begin{bmatrix} -3 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{bmatrix}$$

4. 次の線形写像 T

$$T(\boldsymbol{x}) = \begin{bmatrix} 1 & 0 & -1 & -2 & 10 \\ 2 & 1 & 1 & -2 & 15 \\ -1 & -1 & -2 & 1 & -9 \\ 1 & -1 & -4 & -1 & 3 \end{bmatrix} \boldsymbol{x}, \quad \boldsymbol{x} \in R^5$$

について答えよ.

(1) 核空間 $\mathrm{Ker}\, T$ の次元と基底を一組求めよ.

$$(\text{解答例})\ \mathrm{Ker}\, T = \left\langle \begin{bmatrix} 1 \\ -3 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} -2 \\ -3 \\ 0 \\ 4 \\ 1 \end{bmatrix} \right\rangle, \text{次元は } 2$$

(2) 像空間 $\mathrm{Im}\, T$ の次元と基底を一組求めよ.

$$(\text{解答例})\ \mathrm{Im}\, T = \left\langle \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ -1 \\ 1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ -1 \\ -1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} -2 \\ -2 \\ 1 \\ -1 \end{bmatrix} \right\rangle, \text{次元は } 3$$

5. 行列

$$A = \begin{bmatrix} a & b \\ 0 & c \end{bmatrix}$$

が対角化できないような実数 a, b, c を求めよ. また, その行列が対角化できないことを示せ.

6. 正則行列は 0 を固有値に持たないことを示せ.

7. 行列 A を対角化し, $P^{-1}AP = D$ (D は対角行列, P は正則行列) としたとき, D の対角成分が A の固有値に等しいことを示せ.