線形代数 II 第 10 回 練習問題 (担当: 関口 良行)

所属: ______________ 学籍番号: ______________ 氏名: ______________

注意: 答え合わせの際は, 色ペンを使うこと.

1. 以下の行列が対角化可能か調べ、可能であれば対角化せよ. なお, 逆行列は A^{-1} のような記号を用い計算しなくてよい.

(1) $\begin{bmatrix} 1 & 3 \\ 3 & 1 \end{bmatrix}$

(解答例) 固有値 λ は

$$\begin{vmatrix} 1-\lambda & 3 \\ 3 & 1-\lambda \end{vmatrix} = (4-\lambda)(-2-\lambda) = 0$$

の解となるので, $\lambda = -2, 4$.

$\lambda = -2$ の固有空間 $\mathrm{Ker}(A+2E)$ は,

$$(A+2E)\boldsymbol{x} = \begin{bmatrix} 3 & 3 \\ 3 & 3 \end{bmatrix} \boldsymbol{x} = \boldsymbol{0}$$

の解と一致する. ここで解はパラメータ t を用いて, $\boldsymbol{x} = t \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \end{bmatrix}$ と書けるので,

$\mathrm{Ker}(A+2E) = \langle \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \end{bmatrix} \rangle$ となる.

$\lambda = 4$ の固有空間 $\mathrm{Ker}(A-4E)$ は,

$$(A-4E)\boldsymbol{x} = \begin{bmatrix} -3 & 3 \\ 3 & -3 \end{bmatrix} \boldsymbol{x} = \boldsymbol{0}$$

の解と一致する. 解は $\boldsymbol{x} = t \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix}$ と書けるので, $\mathrm{Ker}(A-4E) = \langle \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix} \rangle$ となる.

ここで, $A \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \end{bmatrix} = (-2) \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \end{bmatrix}$, $A \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix} = 4 \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix}$ という二つの式を一つにまとめると,

$$A \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ -1 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} (-2)\cdot 1 & 4\cdot 1 \\ (-2)\cdot(-1) & 4\cdot 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ -1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -2 & 0 \\ 0 & 4 \end{bmatrix}$$

となるので,

$$\begin{bmatrix} 1 & 1 \\ -1 & 1 \end{bmatrix}^{-1} A \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ -1 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -2 & 0 \\ 0 & 4 \end{bmatrix}$$

と対角化できる.

<u>答え</u> $\begin{bmatrix} 1 & 1 \\ -1 & 1 \end{bmatrix}^{-1} A \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ -1 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -2 & 0 \\ 0 & 4 \end{bmatrix}$

(**注意**) 固有ベクトルによって, 得られる式の並べ方によって, 得られる対角行列の対角要素の順番は変わる.

(2) $\begin{bmatrix} 5 & -1 & -2 \\ 0 & 2 & 0 \\ 6 & -2 & -2 \end{bmatrix}$

(解答例) 固有値 λ は $\begin{vmatrix} 5-\lambda & -1 & -2 \\ 0 & 2-\lambda & 0 \\ 6 & -2 & -2-\lambda \end{vmatrix} = 0$ の解となる. この行列式を 2 行 2 列の要素で展開すると,

$$\begin{vmatrix} 5-\lambda & -1 & -2 \\ 0 & 2-\lambda & 0 \\ 6 & -2 & -2-\lambda \end{vmatrix} = (-1)^{2+2}(2-\lambda)\begin{vmatrix} 5-\lambda & -2 \\ 6 & -2-\lambda \end{vmatrix}$$
$$= (2-\lambda)\{(5-\lambda)(-2-\lambda)-(-2)\cdot 6\} = -(2-\lambda)^2(\lambda-1)$$

となるので, 解は $\lambda = 1, 2$(重解) となる.

$\lambda = 1$ の固有空間 $\mathrm{Ker}(A-E)$ は

$$(A-E)\boldsymbol{x} = \begin{bmatrix} 4 & -1 & -2 \\ 0 & 1 & 0 \\ 6 & -2 & -3 \end{bmatrix}\boldsymbol{x} = \boldsymbol{0}$$

の解と一致する. 係数行列に行基本変形をすると, 例えば,

$$\begin{bmatrix} 4 & -1 & -2 \\ 0 & 1 & 0 \\ 6 & -2 & -3 \end{bmatrix} \longrightarrow \begin{bmatrix} 2 & -1 & -1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

と変形できるので, 解は $\boldsymbol{x} = t\begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 2 \end{bmatrix}$ と書ける. よって, $\mathrm{Ker}(A-E) = \langle \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 2 \end{bmatrix} \rangle$ となる.

$\lambda = 2$ の固有空間 $\mathrm{Ker}(A-2E)$ は,

$$(A-2E)\boldsymbol{x} = \begin{bmatrix} 3 & -1 & -2 \\ 0 & 0 & 0 \\ 6 & -2 & -4 \end{bmatrix}\boldsymbol{x} = \boldsymbol{0}$$

の解と一致する. 係数行列を行基本変形すると,

$$\begin{bmatrix} 3 & -1 & -2 \\ 0 & 0 & 0 \\ 6 & -2 & -4 \end{bmatrix} \longrightarrow \begin{bmatrix} 3 & -1 & -2 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

と変形できる. よって連立方程式は $3x_1 - x_2 - 2x_3 = 0$ と一つの式になり, パラメータ s, t を用いて, $x_2 = s, x_3 = t$ とおくと, $x_1 = \frac{1}{3}s + \frac{2}{3}t$ と書ける. よって解をベクトル表示すると,

$$\boldsymbol{x} = \begin{bmatrix} \frac{1}{3}s + \frac{2}{3}t \\ s \\ t \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{1}{3}s \\ s \\ 0 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \frac{2}{3}t \\ 0 \\ t \end{bmatrix} = s\begin{bmatrix} \frac{1}{3} \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} + t\begin{bmatrix} \frac{2}{3} \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}$$

となる. よって,

$$\mathrm{Ker}(A-2E)=\langle \begin{bmatrix}1/3\\1\\0\end{bmatrix},\begin{bmatrix}2/3\\0\\1\end{bmatrix}\rangle=\langle \begin{bmatrix}1\\3\\0\end{bmatrix},\begin{bmatrix}2\\0\\3\end{bmatrix}\rangle$$

となる (最後の等式はベクトルを定数倍した).

ここで,

$$A\begin{bmatrix}1\\0\\2\end{bmatrix}=1\cdot\begin{bmatrix}1\\0\\2\end{bmatrix},\ A\begin{bmatrix}1\\3\\0\end{bmatrix}=2\cdot\begin{bmatrix}1\\3\\0\end{bmatrix},\ A\begin{bmatrix}2\\0\\3\end{bmatrix}=2\cdot\begin{bmatrix}2\\0\\3\end{bmatrix}$$

という 3 つの式を一つにまとめると,

$$A\begin{bmatrix}1&1&2\\0&3&0\\2&0&3\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}1&1&2\\0&3&0\\2&0&3\end{bmatrix}\begin{bmatrix}1&0&0\\0&2&0\\0&0&2\end{bmatrix}$$

となるので,

$$\begin{bmatrix}1&1&2\\0&3&0\\2&0&3\end{bmatrix}^{-1}A\begin{bmatrix}1&1&2\\0&3&0\\2&0&3\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}1&0&0\\0&2&0\\0&0&2\end{bmatrix}$$

と対角化できる.

$$\underline{\text{答え}}\ \begin{bmatrix}1&1&2\\0&3&0\\2&0&3\end{bmatrix}^{-1}A\begin{bmatrix}1&1&2\\0&3&0\\2&0&3\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}1&0&0\\0&2&0\\0&0&2\end{bmatrix}$$

(**注意**) 固有空間を求めるときに連立方程式の解の表し方は一意ではない. よって, 解をどのように表したかによって, A に掛けられる正則行列は変わってくる. しかし, それでも得られる対角行列は対角要素の順番を除いて一意に決まる.

2. 1.(1), (2) の行列の行列式と固有値をそれぞれ個別に求めよ. また, 行列式が固有値の積に等しい事を確かめよ.

   (解説) 略

感想・要望など