線形代数 II 第 12 回 練習問題 (担当: 関口 良行)

所属: ______________ 学籍番号: ______________ 氏名: ______________

注意: 答え合わせの際は, 色ペンを使うこと.

1. 次のベクトルをシュミットの直交化で正規直交化せよ. また, 正規直交基底になっていることを検算で確かめよ.

(1) $\begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}$

(解答例) ベクトルを左から順に $\boldsymbol{x}_1, \boldsymbol{x}_2, \boldsymbol{x}_3$ とおき, シュミットの直交化で正規直交基底 $\boldsymbol{y}_1, \boldsymbol{y}_2, \boldsymbol{y}_3$ を得る.

$$\boldsymbol{y}_1 = \frac{\boldsymbol{x}_1}{\|\boldsymbol{x}_1\|} = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix},$$

$$\tilde{\boldsymbol{y}}_2 = \boldsymbol{x}_2 - \langle \boldsymbol{y}_1, \boldsymbol{x}_2 \rangle \boldsymbol{y}_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix} - \left(\left\langle \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix} \right\rangle \right) \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix},$$

$$\boldsymbol{y}_2 = \frac{\boldsymbol{y}_2}{\|\boldsymbol{y}_2\|} = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix},$$

$$\tilde{\boldsymbol{y}}_3 = \boldsymbol{x}_3 - \langle \boldsymbol{y}_1, \boldsymbol{x}_3 \rangle \boldsymbol{y}_1 - \langle \boldsymbol{y}_2, \boldsymbol{x}_3 \rangle \boldsymbol{y}_2 = \frac{1}{2} \begin{bmatrix} 0 \\ -1 \\ 1 \end{bmatrix},$$

$$\boldsymbol{y}_3 = \frac{\boldsymbol{y}_3}{\|\boldsymbol{y}_3\|} = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{bmatrix} 0 \\ -1 \\ 1 \end{bmatrix}.$$

答え $\frac{1}{\sqrt{2}} \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}, \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{bmatrix} 0 \\ -1 \\ 1 \end{bmatrix}.$

(**注意**) 左のベクトルから順番にシュミットの直交化を行うと上の結果が得られる. もし, ほかの順番で行えば, 別の正規直交基底が得られる.

(2) 検算せよ.

裏へ続く

(3) $\begin{bmatrix}1\\1\\0\end{bmatrix}, \begin{bmatrix}-1\\2\\3\end{bmatrix}, \begin{bmatrix}0\\1\\2\end{bmatrix}$

(解答例) ベクトルを左から順に $\boldsymbol{x}_1, \boldsymbol{x}_2, \boldsymbol{x}_3$ とおき, シュミットの直交化で正規直交基底 $\boldsymbol{y}_1, \boldsymbol{y}_2, \boldsymbol{y}_3$ を得る.

$$\boldsymbol{y}_1 = \frac{\boldsymbol{x}_1}{\|\boldsymbol{x}_2\|} = \frac{1}{\sqrt{2}}\begin{bmatrix}1\\1\\0\end{bmatrix},$$

$$\tilde{\boldsymbol{y}}_2 = \boldsymbol{x}_2 - \langle \boldsymbol{x}_2, \boldsymbol{y}_1\rangle \boldsymbol{y}_1 = \frac{3}{2}\begin{bmatrix}-1\\1\\2\end{bmatrix},$$

$$\boldsymbol{y}_2 = \frac{\tilde{\boldsymbol{y}}_2}{\|\tilde{\boldsymbol{y}}_2\|} = \frac{1}{\sqrt{6}}\begin{bmatrix}-1\\1\\2\end{bmatrix},$$

$$\tilde{\boldsymbol{y}}_3 = \boldsymbol{x}_3 - \langle \boldsymbol{y}_1, \boldsymbol{x}_3\rangle \boldsymbol{y}_1 - \langle \boldsymbol{y}_2, \boldsymbol{x}_3\rangle \boldsymbol{y}_2 = \frac{1}{3}\begin{bmatrix}1\\-1\\1\end{bmatrix},$$

$$\boldsymbol{y}_3 = \frac{\tilde{\boldsymbol{y}}_3}{\|\tilde{\boldsymbol{y}}_3\|} = \frac{1}{\sqrt{3}}\begin{bmatrix}1\\-1\\1\end{bmatrix}.$$

答え $\frac{1}{\sqrt{2}}\begin{bmatrix}1\\1\\0\end{bmatrix}, \frac{1}{\sqrt{6}}\begin{bmatrix}-1\\1\\2\end{bmatrix}, \frac{1}{\sqrt{3}}\begin{bmatrix}1\\-1\\1\end{bmatrix}.$

(4) 検算せよ.

感想・要望など