線形代数 II　第 13 回 練習問題　(担当: 関口 良行)

所属: ________　学籍番号: ________　氏名: ________

注意: 答え合わせの際は, 色ペンを使うこと.

対称行列を直交対角化せよ.

1. $\begin{bmatrix} -1 & 3 & 0 \\ 3 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & -4 \end{bmatrix}$

(解答例) 復習のために解説入りの長めの解答を書くが, 実際解答する際には適宜省略すること.

まず, 固有値を求める. $A = \begin{bmatrix} -1 & 3 & 0 \\ 3 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & -4 \end{bmatrix}$ とおくと,

$$\det(A-\lambda E) = \begin{vmatrix} -1-\lambda & 3 & 0 \\ 3 & -1-\lambda & 0 \\ 0 & 0 & -4-\lambda \end{vmatrix} = (-4-\lambda)\begin{vmatrix} -1-\lambda & 3 \\ 3 & -1-\lambda \end{vmatrix} = -(4+\lambda)^2(\lambda-2)$$

なので, 固有値は -4 (重解), 2.

$\lambda = -4$ の固有空間 $\mathrm{Ker}(A+4E)$ は, 連立方程式

$$(A+4E)\boldsymbol{x} = \begin{bmatrix} 3 & 3 & 0 \\ 3 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}\boldsymbol{x} = \boldsymbol{0}$$

の解と一致する. ここで, 係数行列を基本変形すると

$$\begin{bmatrix} 3 & 3 & 0 \\ 3 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \longrightarrow \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

となるので, 連立方程式は

$$x_1 + x_2 = 0$$

となる. よって, パラメータ s を用いて, $x_2 = s$ とおくと, $x_1 = -s$ となり, x_3 は任意の数でよいので, パラメータ t を用いて, $x_3 = t$ とおく. すると, 解は

$$\boldsymbol{x} = \begin{bmatrix} -s \\ s \\ t \end{bmatrix} = s\begin{bmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} + t\begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}$$

と書けるので, $\mathrm{Ker}(A+4E) = \left\langle \begin{bmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} \right\rangle$ となる.

$\lambda = 2$ の固有空間 $\mathrm{Ker}(A-2E)$ は, 連立方程式

$$(A-2E)\boldsymbol{x} = \begin{bmatrix} -3 & 3 & 0 \\ 3 & -3 & 0 \\ 0 & 0 & -6 \end{bmatrix}\boldsymbol{x} = \boldsymbol{0}$$

の解と一致する．ここで, 係数行列を基本変形すると

$$\begin{bmatrix} -3 & 3 & 0 \\ 3 & -3 & 0 \\ 0 & 0 & -6 \end{bmatrix} \longrightarrow \begin{bmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

となるので, 連立方程式は,

$$\begin{cases} x_1 - x_2 = 0 \\ x_3 = 0 \end{cases}$$

となる．よって, パラメータ t を用いて, $x_2 = t$ とおくと, $x_1 = t$ となるので, 解は

$$\boldsymbol{x} = t \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}$$

と書ける．したがって, $\mathrm{Ker}(A - 2E) = \langle \left[\begin{smallmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{smallmatrix}\right] \rangle$.

次に得られた固有ベクトル $\boldsymbol{x}_1 = \left[\begin{smallmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \end{smallmatrix}\right], \boldsymbol{x}_2 = \left[\begin{smallmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{smallmatrix}\right], \boldsymbol{x}_3 = \left[\begin{smallmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{smallmatrix}\right]$ を正規直交化する．しかし, これらのベクトルを見ると既に互いに直交していることが分かるので, それぞれノルムが 1 になるように変形すれば, 正規直交基底になる．したがって,

$$\frac{\boldsymbol{x}_1}{\|\boldsymbol{x}_1\|} = \frac{1}{\sqrt{1^2 + (-1)^2 + 0^2}} \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \end{bmatrix} = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \end{bmatrix}, \quad \frac{\boldsymbol{x}_2}{\|\boldsymbol{x}_2\|} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}, \quad \frac{\boldsymbol{x}_3}{\|\boldsymbol{x}_3\|} = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}$$

より, 正規直交基底 $\frac{1}{\sqrt{2}} \left[\begin{smallmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \end{smallmatrix}\right], \left[\begin{smallmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{smallmatrix}\right], \frac{1}{\sqrt{2}} \left[\begin{smallmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{smallmatrix}\right]$ を得る．
最後に, 上で得たベクトルは固有ベクトルなので,

$$A \begin{bmatrix} 1/\sqrt{2} \\ -1/\sqrt{2} \\ 0 \end{bmatrix} = (-4) \begin{bmatrix} 1/\sqrt{2} \\ -1/\sqrt{2} \\ 0 \end{bmatrix}, A \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} = (-4) \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}, A \begin{bmatrix} 1/\sqrt{2} \\ 1/\sqrt{2} \\ 0 \end{bmatrix} = 2 \begin{bmatrix} 1/\sqrt{2} \\ 1/\sqrt{2} \\ 0 \end{bmatrix}$$

という式が成り立ち, これらを一つにまとめると,

$$A \begin{bmatrix} 1/\sqrt{2} & 0 & 1/\sqrt{2} \\ -1/\sqrt{2} & 0 & 1/\sqrt{2} \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1/\sqrt{2} & 0 & 1/\sqrt{2} \\ -1/\sqrt{2} & 0 & 1/\sqrt{2} \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -4 & 0 & 0 \\ 0 & -4 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{bmatrix}$$

が成り立つ．よって,

$$\begin{bmatrix} 1/\sqrt{2} & 0 & 1/\sqrt{2} \\ -1/\sqrt{2} & 0 & 1/\sqrt{2} \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}^{-1} A \begin{bmatrix} 1/\sqrt{2} & 0 & 1/\sqrt{2} \\ -1/\sqrt{2} & 0 & 1/\sqrt{2} \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -4 & 0 & 0 \\ 0 & -4 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{bmatrix}$$

と直交行列で対角化できる．なお, $P = \left[\begin{smallmatrix} 1/\sqrt{2} & 0 & 1/\sqrt{2} \\ -1/\sqrt{2} & 0 & 1/\sqrt{2} \\ 0 & 1 & 0 \end{smallmatrix}\right]$ は直交行列なので, $P^{-1} = P^T = \left[\begin{smallmatrix} 1/\sqrt{2} & -1/\sqrt{2} & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 1/\sqrt{2} & 1/\sqrt{2} & 0 \end{smallmatrix}\right]$ となる．

2. $\begin{bmatrix} 2 & 2 & -1 \\ 2 & -1 & 2 \\ -1 & 2 & 2 \end{bmatrix}$

(解答例) まず, 固有値を求める. $A = \left[\begin{smallmatrix} 2 & 2 & -1 \\ 2 & -1 & 2 \\ -1 & 2 & 2 \end{smallmatrix}\right]$ とおくと,

$$\det(A - \lambda E) = \begin{vmatrix} 2-\lambda & 2 & -1 \\ 2 & -1-\lambda & 2 \\ -1 & 2 & 2-\lambda \end{vmatrix} \overset{1\text{ 列に}, 2\text{ 列と }3\text{ 列を足す}}{=} \begin{vmatrix} 3-\lambda & 2 & -1 \\ 3-\lambda & -1-\lambda & 2 \\ 3-\lambda & 2 & 2-\lambda \end{vmatrix}$$

$$= (3-\lambda)\begin{vmatrix} 1 & 2 & -1 \\ 1 & -1-\lambda & 2 \\ 1 & 2 & 2-\lambda \end{vmatrix} = (3-\lambda)\begin{vmatrix} 1 & 2 & -1 \\ 0 & -3-\lambda & 3 \\ 0 & 0 & 3-\lambda \end{vmatrix} = (3-\lambda)^2(-3-\lambda)$$

となるので, 固有値は $-3, 3$ (重解).

次に, 固有ベクトルを求める. $\lambda = 3$ のとき,

$$(A - 3E)\boldsymbol{x} = \begin{bmatrix} -1 & 2 & -1 \\ 2 & -4 & 2 \\ -1 & 2 & -1 \end{bmatrix} \boldsymbol{x} = \boldsymbol{0}$$

の解は

$$\boldsymbol{x} = t\begin{bmatrix} 2 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} + s\begin{bmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}$$

となる.

$\lambda = -3$ のとき,

$$(A + 3E)\boldsymbol{x} = \begin{bmatrix} 5 & 2 & -1 \\ 2 & 2 & 2 \\ -1 & 2 & 5 \end{bmatrix} \boldsymbol{x} = \boldsymbol{0}$$

の解は

$$\boldsymbol{x} = t\begin{bmatrix} 1 \\ -2 \\ 1 \end{bmatrix}$$

となる.

次に得られた固有ベクトル

$$\boldsymbol{x}_1 = \begin{bmatrix} 2 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}, \boldsymbol{x}_2 = \begin{bmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}, \boldsymbol{x}_3 = \begin{bmatrix} 1 \\ -2 \\ 1 \end{bmatrix}$$

を正規直交化する. 定理より, 異なる固有値の固有ベクトルは直交しているので, 固有値 3 の 固有ベクトル $\boldsymbol{x}_1, \boldsymbol{x}_2$ だけ直交化する.

シュミットの直交化により,

$$\boldsymbol{x}_1 = \begin{bmatrix} 2 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}, \boldsymbol{x}_2 = \begin{bmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}$$

とおくと,

$$\begin{aligned}
\boldsymbol{y}_1 &= \frac{\boldsymbol{x}_1}{\|\boldsymbol{x}_1\|} = \frac{1}{\sqrt{5}} \begin{bmatrix} 2 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}, \\
\tilde{\boldsymbol{y}}_2 &= \boldsymbol{x}_2 - \langle \boldsymbol{y}_1, \boldsymbol{x}_2 \rangle = \frac{1}{5} \begin{bmatrix} -1 \\ 2 \\ 5 \end{bmatrix}, \\
\boldsymbol{y}_2 &= \frac{\tilde{\boldsymbol{y}}_2}{\|\tilde{\boldsymbol{y}}_2\|} = \frac{1}{\sqrt{30}} \begin{bmatrix} -1 \\ 2 \\ 5 \end{bmatrix}
\end{aligned}$$

を得る.
次に $\boldsymbol{x}_3$ のノルムを 1 にすると,

$$\frac{\boldsymbol{x}_3}{\|\boldsymbol{x}_3\|} = \frac{1}{\sqrt{6}} \begin{bmatrix} 1 \\ -2 \\ 1 \end{bmatrix}.$$

したがって, 得られた正規直交基底 $\frac{1}{\sqrt{5}} \begin{bmatrix} 2 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}, \frac{1}{\sqrt{30}} \begin{bmatrix} -1 \\ 2 \\ 5 \end{bmatrix}, \frac{1}{\sqrt{6}} \begin{bmatrix} 1 \\ -2 \\ 1 \end{bmatrix}$ を並べて,

$$A \begin{bmatrix} 2/\sqrt{5} & -1/\sqrt{30} & 1/\sqrt{6} \\ 1/\sqrt{5} & 2/\sqrt{30} & -2/\sqrt{6} \\ 0 & 5/\sqrt{30} & 1/\sqrt{6} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2/\sqrt{5} & -1/\sqrt{30} & 1/\sqrt{6} \\ 1/\sqrt{5} & 2/\sqrt{30} & -2/\sqrt{6} \\ 0 & 5/\sqrt{30} & 1/\sqrt{6} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 3 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & -3 \end{bmatrix}$$

が成り立つ. よって, $P = \begin{bmatrix} 2/\sqrt{5} & -1/\sqrt{30} & 1/\sqrt{6} \\ 1/\sqrt{5} & 2/\sqrt{30} & -2/\sqrt{6} \\ 0 & 5/\sqrt{30} & 1/\sqrt{6} \end{bmatrix}$ とおくと,

$$P^{-1}AP = \begin{bmatrix} 3 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & -3 \end{bmatrix}$$

と直交行列で対角化できる. なお

$$P^{-1} = P^T = \begin{bmatrix} 2/\sqrt{5} & 1/\sqrt{5} & 0 \\ -1/\sqrt{30} & 2/\sqrt{30} & 5/\sqrt{30} \\ 1/\sqrt{6} & -2/\sqrt{6} & 1/\sqrt{6} \end{bmatrix}.$$

感想・要望など