線形代数 II　第 14 回 練習問題　(担当: 関口 良行)

所属: ______________　学籍番号: ______________　氏名: ______________

注意: 答え合わせの際は, 色ペンを使うこと.

1. 2 次形式 $f(\boldsymbol{x}) = 7x_1^2 - 12x_1x_2 - 2x_2^2$ について答えよ.

   (1) $f(\boldsymbol{x}) = \boldsymbol{x}^T A\boldsymbol{x}$ となる対称行列 A を求めよ.

   (解答例) $A = \begin{bmatrix} 7 & -6 \\ -6 & -2 \end{bmatrix}$ とすると, $f(\boldsymbol{x}) = \boldsymbol{x}^T A\boldsymbol{x}$.

   (2) A を $P^{-1}AP = D$ (D は対角行列, P は直交行列) のように直交対角化せよ. $\boldsymbol{x}$ を $\boldsymbol{y} = P^{-1}\boldsymbol{x}$ 変数変換することにより, f の標準形を求めよ.

   (解答例) 固有値は $-5, 10$ となり, $P = \begin{bmatrix} 1/\sqrt{5} & 2/\sqrt{5} \\ 2/\sqrt{5} & -1/\sqrt{5} \end{bmatrix}$ おくと, $P^{-1}AP = \left[\begin{smallmatrix} -5 & 0 \\ 0 & 10 \end{smallmatrix}\right]$ と直交対角化できる. P は直交行列より, $P^1 = P^T$ なので, $A = P\left[\begin{smallmatrix} -5 & 0 \\ 0 & 10 \end{smallmatrix}\right]P^T$ となる. したがって, $\boldsymbol{y} = P^T\boldsymbol{x}$ と変数変換すると,

$$
\begin{aligned}
f(\boldsymbol{x}) = \boldsymbol{x}^T A\boldsymbol{x} = \boldsymbol{x}^T P \begin{bmatrix} -5 & 0 \\ 0 & 10 \end{bmatrix} P^T\boldsymbol{x} = (\boldsymbol{x}^T P)\begin{bmatrix} -5 & 0 \\ 0 & 10 \end{bmatrix}(P^T\boldsymbol{x}) \\
= (P^T\boldsymbol{x})^T \begin{bmatrix} -5 & 0 \\ 0 & 10 \end{bmatrix}(P^T\boldsymbol{x}) = \boldsymbol{y}^T \begin{bmatrix} -5 & 0 \\ 0 & 10 \end{bmatrix}\boldsymbol{y} = -5y_1^2 + 10y_2^2
\end{aligned}
$$

   となり標準型を得る.

裏へ続く

2. 対称行列を直交対角化せよ.

$$A = \begin{bmatrix} -5 & 2 & 2 \\ 2 & -2 & 4 \\ 2 & 4 & -2 \end{bmatrix}$$

(解答略) 固有値は 3, -6 (重解) となる.

3. 検算せよ.

$\boxed{\text{感想・要望など}}$