線形代数 II　第 3 回 練習問題　(担当: 関口 良行)

所属: ＿＿＿＿＿＿　学籍番号: ＿＿＿＿＿＿　氏名: ＿＿＿＿＿＿

1. 次の W がベクトル空間 $\mathbb{R}^3$ の部分空間であるか答えよ．部分空間である場合は定義に従って証明をし, 部分空間でない場合は反例を挙げよ．

(1) $W = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid x + 2y + z = 0\}$

(解答例) 定義に従って示す．まず, 零ベクトル $(x, y, z) = (0, 0, 0)$ は $x + 2y + z = 0$ を満たすので, W に属している．

次に和について調べる． $\boldsymbol{u} = (u_1, u_2, u_3), \boldsymbol{v} = (v_1, v_2, v_3) \in W$ とする． すると, $u_1+2u_2+u_3 = 0, v_1+2v_2+v_3 = 0$ を満たす．ここで, $\boldsymbol{u}+\boldsymbol{v} = (u_1+v_1, u_2+v_2, u_3+v_3)$ が W に属していることを示す．いま, $\boldsymbol{u} + \boldsymbol{v}$ を集合の条件式に代入すると,

$$(u_1 + v_1) + 2(u_2 + v_2) + (u_3 + v_3) = (u_1 + 2u_2 + u_3) + (v_1 + 2v_2 + v_3) = 0 + 0 = 0$$

なので, $\boldsymbol{u} + \boldsymbol{v} \in W$ となる．

最後にスカラー倍について調べる．$c \in \mathbb{R}$, $\boldsymbol{u} \in W$ とし, $c\boldsymbol{u} = (cu_1, cu_2, cu_3) \in W$ となることを示す．実際, $(cu_1) + 2(cu_2) + (cu_3) = c(u_1 + 2u_2 + u_3) = c0 = 0$ なので, $c\boldsymbol{u} \in W$ である．よって, W は部分空間であることが示された．

(2) $W = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid 3x - y + 5z \leq 1\}$

部分空間でない．

(解答例) 反例として, W の要素で, 和かスカラー倍が W に入らないものを具体的に挙げる．

$\boldsymbol{u} = (1/3, 0, 0)$ とすると, $\boldsymbol{u} \in W$ となる．しかし, $100\boldsymbol{u} = (100/3, 0, 0) \notin W$ なので, スカラー倍は入らない．従って, W は部分空間でない．

(3) $W = \left\{ (x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \;\middle|\; \begin{matrix} 2x + y + z \leq 1 \\ 2x + y + z = 0 \end{matrix} \right\}$

(解答例) 定義より直接, 部分空間であることを示せる．

別解として, 集合の条件式に注目すると, 集合 W が $W_0 = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid 2x+y+z = 0\}$ に等しいことが分かる．よってより簡単な条件式より, 部分空間であることを示すこともできる．

集合の扱い方を練習するために, $W = W_0$ をきちんと示そう．二つの集合が等しいとは, $W \subset W_0$ かつ $W_0 \subset W$ が成り立つことである．$W \subset W_0$ は自明なので, $W_0 \subset W$ を示そう．これを示すには, 「$\boldsymbol{u} \in W_0$ ならば, $\boldsymbol{u} \in W$」 を示せば良い．$\boldsymbol{u} = (u_1, u_2, u_3) \in W_0$ とすると, $2u_1 + u_2 + u_3 = 0$ となる．W の一番目の式に $\boldsymbol{u}$ を代入すると, $2u_1 + u_2 + u_3 = 0 \leq 1$ となるので, $\boldsymbol{u} \in W$ となる．よって, $W_0 \subset W$ であるので等号が示された．

(4) $W = \left\{ (x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \;\middle|\; \begin{matrix} x - y + 3z = 0 \\ x^2 + y^2 + z^2 \leq 1 \end{matrix} \right\}$

部分空間でない．

(解答例) 反例; $\boldsymbol{u} = (1/\sqrt{2}, 1/\sqrt{2}, 0) \in W$ だが $10\boldsymbol{u} = (100/\sqrt{(2)}, 100\sqrt{2}, 0) \notin W$.

2. 次の W がベクトル空間 $\mathbb{R}[x]_2$ の部分空間であるか答えよ. 部分空間である場合は定義に従って証明をし, 部分空間でない場合は反例を挙げよ.

(1) $W = \{f \in \mathbb{R}[x]_2 \mid f(1) = 0\}$

(解答例) W の中の要素を多項式として書くことにより示す.

まず, 恒等的に零となる多項式は W に入るので, $\mathbf{0} \in W$ である.

次に和について調べる. $g, h \in W$ とする. g, h は 次数 2 以下の多項式なので, ある数 $a_0, a_1, a_2, b_0, b_1, b_2$ が存在して, $g(x) = a_0 + a_1x + a_2x^2$, $h(x) = b_0 + b_1x + b_2x^2$ と書ける. いま, $g(1) = 0, h(1) = 0$ より, $g(1) = a_0 + a_1 + a_2 = 0$, $h(1) = b_0 + b_1 + b_2 = 0$ が成り立つ. ここで, $g + h \in W$ を示す. $(g+h)(x) = (a_0+b_0)+(a_1+b_1)x+(a_2+b_2)x^2$ なので, $(g + h)(1) = (a_0 + b_0) + (a_1 + b_1) + (a_2 + b_2) = 0$ となる. よって, $g + h \in W$ である.

最後にスカラー倍について調べる. $c \in \mathbb{R}, g \in W$ とする. $(cg)(x) = ca_0+ca_1x+ca_2x^2$ なので, $(cg)(1) = ca_0 + ca_1 + ca_2 = 0$ となる. よって, $cg \in W$ である.

従って, W は部分空間である.

(2) $W = \{f \in \mathbb{R}[x]_2 \mid xf'(x) = 2f(x)\}$ (講義中に配ったプリントにはミスがあります. ただし解答は変わりません)

(解答例) W の要素を関数として直接扱う.

まず, 恒等的に零となる多項式は W に入る.

次に和について調べる. $g, h \in W$ とすると, $xg'(x) = 2g(x)$, $xh'(x) = 2h(x)$ を満たす. ここで, $g + h \in W$ を示す. これには, $x(g + h)'(x) = 2(g + h)(x)$ を示せば良い (集合 W の条件式の f を $g + h$ に変えた式). いま,

$$x(g + h)'(x) = x(g(x) + h(x))' = xg'(x) + xh'(x) = 2g(x) + 2h(x) = 2(g + h)(x)$$

なので, $g + h \in W$ である.

次に, スカラー倍について調べる. $c \in \mathbb{R}$, $g \in W$ とする. すると $x(cg)'(x) = x(cg(x))' = cxg'(x) = c2g(x) = 2(cg)(x)$ なので, $cg \in W$ である.

従って, W は部分空間である.

(注) 多項式を $g(x) = a_0 + a_1x + a_2x^2$, $h(x) = b_0 + b_1x + b_2x$ とおいて, 係数の関係式を調べることにより, W が部分空間であることを調べてみよう.

感想・要望など