線形代数 II　第 4 回 練習問題　(担当: 関口 良行)

所属: ______________　学籍番号: ______________　氏名: ______________

1. 次のベクトルが 1 次独立かか調べよ．一次従属の場合は, どれか一つのベクトルを他のベクトルの一次結合で書け．

(1) $\left\{ \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} \right\}$

(解答例) $c_1 \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix} + c_2 \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix} + c_3 \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} = \mathbf{0}$ とする．すると, これは連立 1 次方程式

$$\begin{cases} c_1 & = 0 \\ c_1 + c_2 & = 0 \\ c_1 + c_2 + c_3 & = 0 \end{cases}$$

を表す．上の式より, 連立 1 次方程式の解は $(0, 0, 0)$ のみである．よって, 問のベクトルは一次独立である．

(2) $\left\{ \begin{bmatrix} 2 \\ 4 \\ 2 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 1 \\ 3 \\ 3 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 4 \\ 10 \\ 8 \end{bmatrix} \right\}$

(解答例) $c_1 \begin{bmatrix} 2 \\ 4 \\ 2 \end{bmatrix} + c_2 \begin{bmatrix} 1 \\ 3 \\ 3 \end{bmatrix} + c_3 \begin{bmatrix} 4 \\ 10 \\ 8 \end{bmatrix} = \mathbf{0}$ とする．すると, これは連立 1 次方程式

$$\begin{cases} 2c_1 + c_2 + 4c_3 = 0 \\ 4c_1 + 3c_2 + 10c_3 = 0 \\ 2c_1 + 3c_2 + 8c_3 = 0 \end{cases}$$

を表す．ガウスの消去法により解くと, パラメータ t を用いて, 解は $(c_1, c_2, c_3) = (-t, -2t, t)$ と書ける．よって特に, $t = 1$ とすると, $(-1, -2, 1)$ が解になり,

$$(-1) \begin{bmatrix} 2 \\ 4 \\ 2 \end{bmatrix} + (-2) \begin{bmatrix} 1 \\ 3 \\ 3 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 4 \\ 10 \\ 8 \end{bmatrix} = \mathbf{0}$$

が成り立つ．よって問いのベクトルは一次従属である．

また, 第 1, 2 項を移行すれば, 第 3 項は $\begin{bmatrix} 4 \\ 10 \\ 8 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 \\ 4 \\ 2 \end{bmatrix} + 2 \begin{bmatrix} 1 \\ 3 \\ 3 \end{bmatrix}$ と書ける．

(3) $\left\{ \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 2 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ -4 \end{bmatrix} \right\}$

(解答例) $c_1 \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 2 \end{bmatrix} + c_2 \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{bmatrix} + c_3 \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ -4 \end{bmatrix} = \mathbf{0}$ とする. すると, これは連立 1 次方程式

$$\begin{cases} c_1 + c_2 + c_3 = 0 \\ c_1 + 2c_2 + 2c_3 = 0 \\ 2c_1 + 3c_2 - 4c_3 = 0 \end{cases}$$

を表す. ガウスの消去法を用いると,

$$\begin{cases} c_1 + c_2 + c_3 = 0 \\ \qquad c_2 + c_3 = 0 \\ \qquad\qquad c_3 = 0 \end{cases}$$

と変形できる. よって解は $(c_1, c_2, c_3) = (0, 0, 0)$ となる. 従って問のベクトルは 1 次独立である.

2. a を実数とするとき, $\left\{ \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 2 \\ 3 \\ 1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} -3 \\ -4 \\ a \end{bmatrix} \right\}$ が一次独立となる a の条件を求めよ.

(解答例) $c_1 \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 1 \end{bmatrix} + c_2 \begin{bmatrix} 2 \\ 3 \\ 1 \end{bmatrix} + c_3 \begin{bmatrix} -3 \\ -4 \\ a \end{bmatrix} = \mathbf{0}$ とする. これは連立 1 次方程式

$$\begin{cases} c_1 + 2c_2 - 3c_3 = 0 \\ 2c_1 + 3c_2 - 4c_3 = 0 \\ c_1 + c_2 + ac_3 = 0 \end{cases}$$

を表す. ガウスの消去法を用いると,

$$\begin{cases} c_1 + 2c_2 - 3c_3 = 0 \\ \qquad -c_2 + 2c_3 = 0 \\ \qquad\qquad (a+1)c_3 = 0 \end{cases}$$

と変形できる. よって, $a \neq -1$ のとき, $(c_1, c_2, c_3) = (0, 0, 0)$ となる. 逆に $a = -1$ のとき, パラメータ t を用いて, $c_3 = t$ とおくと, 解は $(c_1, c_2, c_3) = (-t, 2t, t)$ とり, $(0, 0, 0)$ 以外の解が存在する. よって, 問のベクトルが 1 次独立になるのは $a \neq -1$ のときである.

感想・要望など