# 線形代数 II　第 5 回 練習問題　(担当: 関口 良行)

所属: ＿＿＿＿＿＿　学籍番号: ＿＿＿＿＿＿　氏名: ＿＿＿＿＿＿

1. 次のベクトルで一次独立なベクトルの最大個数 $r$ を求めよ．また $r$ 個の一次独立なベクトルを左の方から求めよ．

$$\left\{\begin{bmatrix}1\\2\\3\end{bmatrix}, \begin{bmatrix}0\\1\\0\end{bmatrix}, \begin{bmatrix}1\\0\\3\end{bmatrix}, \begin{bmatrix}1\\3\\4\end{bmatrix}, \begin{bmatrix}1\\2\\2\end{bmatrix}\right\}$$

(解答例) 与えられたベクトルを並べて行列を作る．

$$\begin{bmatrix}1&0&1&1&1\\2&1&0&3&2\\3&0&3&4&2\end{bmatrix} \xrightarrow{\text{行基本変形}} \begin{bmatrix}1&0&1&0&2\\0&1&-2&0&1\\0&0&0&1&-1\end{bmatrix}$$

変形後の行列の列ベクトルを見ると, 第 $1, 2, 4$ 列が 1 次独立である．さらに, そのベクトルの 1 次結合で他のベクトルは書けるので, 一次独立なベクトルの最大個数は 3 である．このとき, 変形前の行列の第 $1, 2, 4$ 列のベクトルも同様の性質を持つ．よって, 一次独立なベクトルの最大個数は 3 であり, 左から順に選ぶと $\begin{bmatrix}1\\2\\3\end{bmatrix}, \begin{bmatrix}0\\1\\0\end{bmatrix}, \begin{bmatrix}1\\3\\4\end{bmatrix}$ が 3 つのベクトルからなる 1 次独立なベクトルの組である．

2. 次の行列 $A$ と部分空間 $W$ に対して, $W$ の基底を一組と $\dim W$ を求めよ．また $\dim W + \operatorname{rank} A$ を求めよ．

(1) $A = \begin{bmatrix}1&1&1\\1&-1&-3\\2&-1&-4\end{bmatrix}$, $W = \{\boldsymbol{x} \in \mathbb{R}^3 \mid A\boldsymbol{x} = \mathbf{0}\}$

(解答例) 連立方程式 $A\boldsymbol{x} = \mathbf{0}$ を解く．解はパラメータ $t$ を用いて $x_3 = t$ とおくと, $\boldsymbol{x} = t\begin{bmatrix}1\\-2\\1\end{bmatrix}$ と書ける．よって, $W$ の基底は $\begin{bmatrix}1\\-2\\1\end{bmatrix}$ となり, $\dim W = 1$ である．いま $\operatorname{rank} A = 2$ なので, $\dim W + \operatorname{rank} A = 3$ となる．

(2) $A = \begin{bmatrix}1&1&3&0&0\\1&2&5&-2&-5\\1&1&3&1&2\\2&0&2&4&10\end{bmatrix}$, $\mathbb{R}^5$ の部分空間 $W = \{\boldsymbol{x} \in \mathbb{R}^5 \mid A\boldsymbol{x} = \mathbf{0}\}$

(解答例) 連立方程式 $A\boldsymbol{x} = \mathbf{0}$ の解は, パラメータ $s, t$ を用いて, $x_3 = s, x_5 = t$ とおくと, $s\begin{bmatrix}-1\\-2\\1\\0\\0\end{bmatrix} + t\begin{bmatrix}-1\\1\\0\\-2\\1\end{bmatrix}$ と書ける．よって, $W$ の基底は $\begin{bmatrix}-1\\-2\\1\\0\\0\end{bmatrix}, \begin{bmatrix}-1\\1\\0\\-2\\1\end{bmatrix}$ となり, $\dim W = 2$．いま $\operatorname{rank} A = 3$ なので, $\dim W + \operatorname{rank} A = 5$ である．

(**注意**) 基底は一種類ではない．求めたベクトルが 2 つあり, 1 次独立で, 連立 1 次方程式の解になっていれば, 次元の一意性より基底になる．