線形代数 II　第 6 回 練習問題　(担当: 関口 良行)

所属: ____________　学籍番号: ____________　氏名: ____________

注意: 答え合わせの際は, 色ペンを使うこと

$m \times n$ 行列 A に対して, 線形写像 $T_A \colon \mathbb{R}^m \to \mathbb{R}^n$ を $T_A(\boldsymbol{x}) = A\boldsymbol{x}$ で定義する.

1. $A = \begin{bmatrix} 2 & 1 & 4 \\ 4 & 3 & 10 \\ 2 & 3 & 8 \end{bmatrix}$ について次の問いに答えよ.

   (1) $\operatorname{Ker} T_A$ の基底を一組求めよ.

   (解答例) 定義より, $\operatorname{Ker} T_A = \{\boldsymbol{x} \in \mathbb{R}^3 \mid A\boldsymbol{x} = \mathbf{0}\}$ となるので, 連立 1 次方程式 $A\boldsymbol{x} = \mathbf{0}$ の解を求める. A を行基本変形すると

$$\begin{bmatrix} 2 & 1 & 4 \\ 4 & 3 & 10 \\ 2 & 3 & 8 \end{bmatrix} \to \begin{bmatrix} 2 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \to \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

   となる. これより, 解はパラメータ t を用いて,

   $\boldsymbol{x} = t \begin{bmatrix} -1 \\ -2 \\ 1 \end{bmatrix}$ と書ける. よって $\begin{bmatrix} -1 \\ -2 \\ 1 \end{bmatrix}$ は $\operatorname{Ker} T_A$ の基底である.

   (**補足**) 解が上のベクトルの定数倍で書けることを示した. これは, $\operatorname{Ker} T_A$ の任意のベクトルが上のベクトルの一次結合で表せるということである. またベクトルを一つのみ考えるとそれは一次独立なので, このベクトルは $\operatorname{Ker} T_A$ の基底になる.

   (**注**) 基底は一通りではない. 例えば求めたベクトルを零以外の実数を掛けたベクトルも基底の定義を満たすことがわかる.

   (2) $\operatorname{Im} T_A$ の基底を一組求めよ.

   (解答例) (1) で得た A の階段行列で, 1 列, 2 列のベクトルは一次独立なベクトルの組になる. また 3 列のベクトルは 1 列, 2 列のベクトルの一次結合で書ける. 対応する A の列ベクトルも同様の性質を持つので, $\left\{ \begin{bmatrix} 2 \\ 4 \\ 2 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 1 \\ 3 \\ 3 \end{bmatrix} \right\}$ は $\operatorname{Im} T_A$ の基底になる.

   (**注**) 基底は一通りではないが, 基底ベクトルの個数は唯一に定まる. この問題では, A の列ベクトルを任意に二つ選ぶと $\operatorname{Im} T_A$ の基底になっている.

2. $A = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 3 & 0 & 0 \\ 1 & 2 & 5 & -2 & -5 \\ 1 & 1 & 3 & 1 & 2 \\ 2 & 0 & 2 & 4 & 10 \end{bmatrix}$ に対して, $\operatorname{Im} T_A$ の基底を一組求めよ.

(解答例) A を行基本変形すると

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 2 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

となる. よって, 1.(2) と同様の理由で, A の 1 列, 2 列, 4 列のベクトル $\begin{bmatrix}1\\1\\1\\2\end{bmatrix}, \begin{bmatrix}1\\2\\1\\0\end{bmatrix}, \begin{bmatrix}0\\-2\\1\\4\end{bmatrix}$ は $\mathrm{Ker}\, T_A$ の基底になる.

3. $\boldsymbol{a}_1, \boldsymbol{a}_2, \boldsymbol{a}_3 \in \mathbb{R}^5$ が 1 次独立であるとする. $\boldsymbol{u} \in \mathbb{R}^5$ が $\boldsymbol{u} = c_1\boldsymbol{a}_1 + c_2\boldsymbol{a}_2 + c_3\boldsymbol{a}_3$ と, $\boldsymbol{a}_1, \boldsymbol{a}_2, \boldsymbol{a}_3$ の 1 次結合で表せるとき, c_1, c_2, c_3 は一通りに決まることを証明せよ.

   (解答例) $\boldsymbol{u} = c_1\boldsymbol{a}_1 + c_2\boldsymbol{a}_2 + c_3\boldsymbol{a}_3$, $\boldsymbol{u} = d_1\boldsymbol{a}_1 + d_2\boldsymbol{a}_2 + d_3\boldsymbol{a}_3$ と書けると仮定する. 辺同士を引くと, $(c_1 - d_1)\boldsymbol{a}_1 + (c_2 - d_2)\boldsymbol{a}_2 + (c_3 - d_3)\boldsymbol{a}_3 = \boldsymbol{0}$ を得る. いま, $\boldsymbol{a}_1, \boldsymbol{a}_2, \boldsymbol{a}_3$ は一次独立なので, $c_1 = d_1$, $c_2 = d_2$, $c_3 = d_3$ となり, 一次結合の係数は一通りに定まることが示された.

感想・要望など