線形代数 II　第 7 回 練習問題　(担当: 関口 良行)

所属: ＿＿＿＿＿＿　学籍番号: ＿＿＿＿＿＿　氏名: ＿＿＿＿＿＿

注意: 答え合わせの際は, 色ペンを使うこと

1. $A = \begin{bmatrix} 3 & 1 & -1 \\ 4 & 3 & -2 \\ 6 & 3 & -2 \end{bmatrix}$, 線形写像 $T\colon \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ を $T(\boldsymbol{x}) = A\boldsymbol{x}$ で定義する. 以下の問いに答えよ.

(1) $\boldsymbol{u}_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{bmatrix}, \boldsymbol{u}_2 = \begin{bmatrix} -1 \\ -1 \\ -3 \end{bmatrix}, \boldsymbol{u}_3 = \begin{bmatrix} -1 \\ 0 \\ -2 \end{bmatrix}$ は $\mathbb{R}^3$ の基底になることを示せ.

(解答例) $\dim \mathbb{R}^3 = 3$ なので, 定理より 3 つの 1 次独立なベクトルは $\mathbb{R}^3$ の基底になる. したがって, $\boldsymbol{u}_1, \boldsymbol{u}_2, \boldsymbol{u}_3$ が 1 次独立であることを示せば良い.

$$c_1\boldsymbol{u}_1 + c_2\boldsymbol{u}_2 + c_3\boldsymbol{u}_3 = \boldsymbol{0}$$

とおく. すると c_1, c_2, c_3 は連立 1 次方程式

$$\begin{bmatrix} 1 & -1 & -1 \\ 2 & -1 & 0 \\ 3 & -3 & -2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} c_1 \\ c_2 \\ c_3 \end{bmatrix} = \boldsymbol{0}$$

の解になる. 行基本変形により

$$\begin{bmatrix} 1 & -1 & -1 \\ 2 & -1 & 0 \\ 3 & -3 & -2 \end{bmatrix} \to \begin{bmatrix} 1 & -1 & -1 \\ 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

なので, $(c_1, c_2, c_3) = (0, 0, 0)$ を得る. よって, $\boldsymbol{u}_1, \boldsymbol{u}_2, \boldsymbol{u}_3$ は 1 次独立である.

(2) $\boldsymbol{u}_1, \boldsymbol{u}_2, \boldsymbol{u}_3$ に関する T の表現行列を求めよ.

(解答例)

$$U = [\boldsymbol{u}_1\ \boldsymbol{u}_2\ \boldsymbol{u}_3] = \begin{bmatrix} 1 & -1 & -1 \\ 2 & -1 & 0 \\ 3 & -3 & -2 \end{bmatrix}$$

とおく. すると, $\boldsymbol{u}_1, \boldsymbol{u}_2, \boldsymbol{u}_3$ に関する T の表現行列 は $U^{-1}AU$ となる. これを計算すると,

$$U^{-1}AU = \begin{bmatrix} 2 & 1 & -1 \\ 4 & 1 & -2 \\ -3 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 3 & 1 & -1 \\ 4 & 3 & -2 \\ 6 & 3 & -2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & -1 & -1 \\ 2 & -1 & 0 \\ 3 & -3 & -2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

を得る.

裏へ続く

2. $\boldsymbol{a}_1, \ldots, \boldsymbol{a}_n \in \mathbb{R}^n$ に対して, $\langle \boldsymbol{a}_1, \ldots, \boldsymbol{a}_n \rangle$ が $\mathbb{R}^n$ の部分空間であることを証明せよ.

(解答例) $\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y} \in \langle \boldsymbol{a}_1, \ldots, \boldsymbol{a}_n \rangle$ とする. すると, ある $c_1, \ldots, c_n, d_1, \ldots, d_n \in \mathbb{R}$ があって,

$$\boldsymbol{x} = c_1\boldsymbol{a}_1 + \cdots + c_n\boldsymbol{a}_n, \quad \boldsymbol{y} = d_1\boldsymbol{a}_1 + \cdots + d_n\boldsymbol{a}_n$$

と書ける. よって, それらの和は

$$\boldsymbol{x} + \boldsymbol{y} = (c_1 + d_1)\boldsymbol{a}_1 + \cdots + (c_n + d_n)\boldsymbol{a}_n$$

と書けるので, $\boldsymbol{x} + \boldsymbol{y} \in \langle \boldsymbol{a}_1, \ldots, \boldsymbol{a}_n \rangle$ である. 次に $\boldsymbol{x}$ のスカラー倍について調べる. $\lambda \in \mathbb{R}$ とすると,

$$\lambda\boldsymbol{x} = \lambda c_1\boldsymbol{a}_1 + \cdots + \lambda c_n\boldsymbol{a}_n$$

と書けるので, $\lambda\boldsymbol{x} \in \langle \boldsymbol{a}_1, \ldots, \boldsymbol{a}_n \rangle$ である. これらより, $\langle \boldsymbol{a}_1, \ldots, \boldsymbol{a}_n \rangle$ は $\mathbb{R}^n$ の部分空間であることが示された.

感想・要望など