線形代数 II 第 8 回 練習問題 (担当: 関口 良行)

所属: ______________ 学籍番号: ______________ 氏名: ______________

注意: 答え合わせの際は, 色ペンを使うこと. 計算量が多いので, 裏面も使い途中計算は大きな文字ですること

以下の行列の固有値と固有ベクトルを求めよ.
注意 教科書 ($p116$ 〜) に丁寧な解説があるのでそれを読むこと.

1. $\begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 2 \end{bmatrix}$

   (解答例) 固有方程式は

$$\det\left(\begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 2 \end{bmatrix} - \lambda E\right) = \begin{vmatrix} 2-\lambda & 1 \\ 1 & 2-\lambda \end{vmatrix} = (3-\lambda)(1-\lambda) = 0$$

   となるので, 固有値は $\lambda = 1, 3$ である. $\lambda = 1$ に対する固有ベクトルは

$$(A-E)\boldsymbol{x} = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}\boldsymbol{x} = \mathbf{0}$$

   の解の一つである. 解はパラメータ t を用いて, $t\begin{bmatrix} 1 \\ -1 \end{bmatrix}$ と書けるので, 特に $t = 1$ とおくと, 固有ベクトルは $\begin{bmatrix} 1 \\ -1 \end{bmatrix}$ である.

   $\lambda = 3$ に対する固有ベクトルは

$$(A-3E)\boldsymbol{x} = \begin{bmatrix} -1 & 1 \\ 1 & -1 \end{bmatrix}\boldsymbol{x} = \mathbf{0}$$

   の解なので, $\begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix}$ である.

   注 実際に固有値と固有ベクトルが $A\boldsymbol{x} = \lambda\boldsymbol{x}$ という式を満たすか, 検算して確かめると良い.

   注 $\lambda = 1$ のとき, $t\begin{bmatrix} 1 \\ -1 \end{bmatrix}$ は固有ベクトルの一般型である. 「固有ベクトルを求めよ」という問題には, t に適当な数を代入たベクトルを答えれば良い. したがって, $\begin{bmatrix} 2 \\ -2 \end{bmatrix}$ または, $\begin{bmatrix} -1 \\ 1 \end{bmatrix}$ も正解である.

2. $\begin{bmatrix} 2 & -3 & 3 \\ 1 & -2 & 3 \\ 1 & -1 & 2 \end{bmatrix}$

(解答例) 固有方程式は

$$\begin{vmatrix} 2-\lambda & -3 & 3 \\ 1 & -2-\lambda & 3 \\ 1 & -1 & 2-\lambda \end{vmatrix} = 0$$

となる. 左辺を基本変形により計算すると,

$$\begin{aligned}
&\begin{vmatrix} 2-\lambda & -3 & 3 \\ 1 & -2-\lambda & 3 \\ 1 & -1 & 2-\lambda \end{vmatrix} \\
&\qquad = \begin{vmatrix} 0 & -3+(2-\lambda) & 3-(2-\lambda)^2 \\ 0 & -1-\lambda & 1+\lambda \\ 1 & -1 & 2-\lambda \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 0 & 0 & 3-(2-\lambda)^2-(1+\lambda) \\ 0 & -1-\lambda & 1+\lambda \\ 1 & -1 & 2-\lambda \end{vmatrix} \\
&\qquad\qquad = -(-1-\lambda)\{3-(2-\lambda)^2-(1+\lambda)\} = -(1+\lambda)(\lambda-2)(\lambda-1)
\end{aligned}$$

よって, 固有値は $\lambda=-1,1,2$ である. 固有ベクトルはそれぞれ, $\lambda=-1$, $\begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}$, $\lambda=1$, $\begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}$, $\lambda=2$, $\begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}$ である.

感想・要望など