線形代数 II　第 9 回 練習問題　(担当: 関口 良行)

所属: ＿＿＿＿＿＿　学籍番号: ＿＿＿＿＿＿　氏名: ＿＿＿＿＿＿

注意: 答え合わせの際は, 色ペンを使うこと.

以下の行列が対角化可能か調べ、可能であれば対角化せよ. なお, 逆行列は A^{-1} のような記号を用い計算しなくてよい.

1. $\begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 1 \end{bmatrix}$

(解答例) 固有値は $\lambda = -1, 3$ となる. $\lambda = -1$ の固有空間 $\mathrm{Ker}(A+E)$ は

$$(A+E)\boldsymbol{x} = \begin{bmatrix} 2 & 2 \\ 2 & 2 \end{bmatrix} \boldsymbol{x} = \mathbf{0}$$

の解と一致する. ここで解はパラメータ t を用いて, $\boldsymbol{x} = t \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \end{bmatrix}$ と書けるので, 固有空間は $\mathrm{Ker}(A+E) = \langle \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \end{bmatrix} \rangle$ となる. 同様に $\lambda = 3$ の固有空間 $\mathrm{Ker}(A-3E)$ は

$$(A-3E)\boldsymbol{x} = \begin{bmatrix} -2 & 2 \\ 2 & -2 \end{bmatrix} \boldsymbol{x} = \mathbf{0}$$

の解と一致するので, $\mathrm{Ker}(A-3E) = \langle \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix} \rangle$ となる. いま, $\dim \mathrm{Ker}(A+E) + \dim \mathrm{Ker}(A-3E) = 1 + 1 = 2$ なので, A は対角化できる. 正則行列 $\begin{bmatrix} 1 & 1 \\ -1 & 1 \end{bmatrix}$ を A に右からかけると,

$$\begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ -1 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ -1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 3 \end{bmatrix}$$

なので,

$$\begin{bmatrix} 1 & 1 \\ -1 & 1 \end{bmatrix}^{-1} \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ -1 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 3 \end{bmatrix}$$

となる.

(注) 固有値 λ の固有空間 $\mathrm{Ker}(A - \lambda E)$ とは, λ の固有ベクトルをすべて集めて, $\mathbf{0}$ を加えたものと一致する.

(注) 対角化した結果 $\begin{bmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 3 \end{bmatrix}$ は一通りではない. 実際, $U = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{bmatrix}$ (P 列を入れ替えた行列) とすると, $U^{-1}AU = \begin{bmatrix} 3 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix}$ となる. しかし, 一致しなくても, 対角要素の順番が変わるだけである.

2. $\begin{bmatrix} 0 & 2 & 2 \\ 1 & -1 & 1 \\ -2 & -2 & -4 \end{bmatrix}$

(解答例) 固有値は $\lambda = -1, -2$ となる．$\lambda = -1$ の固有空間 $\mathrm{Ker}(A+E)$ を求めると，

$$(A+E)\boldsymbol{x} = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 2 \\ 1 & 0 & 1 \\ -2 & -2 & -3 \end{bmatrix} \boldsymbol{x} = \mathbf{0}$$

の解と一致する． ここで解はパラメータ s を用いて，$\boldsymbol{x} = s \begin{bmatrix} 2 \\ 1 \\ -2 \end{bmatrix}$ と書ける． よって $\mathrm{Ker}(A+E) = \langle \begin{bmatrix} 2 \\ 1 \\ -2 \end{bmatrix} \rangle$ となる．同様に $\lambda = -2$ の固有空間 $\mathrm{Ker}(A+2E)$ は

$$(A+2E)\boldsymbol{x} = \begin{bmatrix} 2 & 2 & 2 \\ 1 & 1 & 1 \\ -2 & -2 & -2 \end{bmatrix} \boldsymbol{x} = \mathbf{0}$$

の解と一致する．ここで解はパラメータ s, t を用いて，$\boldsymbol{x} = s \begin{bmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} + t \begin{bmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}$ と書ける．

したがって $\mathrm{Ker}(A+2E) = \langle \begin{bmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} \rangle$ となる．$\dim \mathrm{Ker}(A+E) + \dim \mathrm{Ker}(A+2E) = 1 + 2 = 3$ なので，正則行列 $\begin{bmatrix} 2 & -1 & -1 \\ 1 & 1 & 0 \\ -2 & 0 & 1 \end{bmatrix}$ を A に右からかけると，

$$\begin{bmatrix} 0 & 2 & 2 \\ 1 & -1 & 1 \\ -2 & -2 & -4 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 2 & -1 & -1 \\ 1 & 1 & 0 \\ -2 & 0 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 & -1 & -1 \\ 1 & 1 & 0 \\ -2 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & -2 & 0 \\ 0 & 0 & -2 \end{bmatrix}$$

なので，

$$\begin{bmatrix} 2 & -1 & -1 \\ 1 & 1 & 0 \\ -2 & 0 & 1 \end{bmatrix}^{-1} \begin{bmatrix} 0 & 2 & 2 \\ 1 & -1 & 1 \\ -2 & -2 & -4 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 2 & -1 & -1 \\ 1 & 1 & 0 \\ -2 & 0 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & -2 & 0 \\ 0 & 0 & -2 \end{bmatrix}$$

となる．

裏へ続く

3. $\begin{bmatrix} -1 & 9 & -6 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & -4 & 4 \end{bmatrix}$

(解答例) 固有値は $\lambda = 1, 2$ となる. $\lambda = 1$ の固有空間は $\mathrm{Ker}(A - E) = \langle \begin{bmatrix} -3 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} \rangle$, $\lambda = 2$ の固有空間は $\mathrm{Ker}(A - 2E) = \langle \begin{bmatrix} -2 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} \rangle$ となる. ここで $\dim \mathrm{Ker}(A - E) + \dim \mathrm{Ker}(A - 2E) = 1 + 1 < 3$ となるので, 定理より A は対角化できない.

感想・要望など