線形代数 II　自習問題　(2008 年度, 担当: 関口 良行)

1. 自習用の問題です. テスト勉強に役立ててください
2. 答えは非公開です. 自力, または友人と相談して解いてください.
3. 質問は受け付けますが, 直接答えは聞かないでください.

1. 次の線形写像 T について, 像空間 $\operatorname{Im} T$, 核空間 $\operatorname{Ker} T$ の基底と次元を求めよ.

(1) $T(\boldsymbol{x}) = \begin{bmatrix} 3 & 1 & 3 & -10 \\ 1 & -2 & 1 & -8 \\ 2 & 3 & 3 & -5 \\ 1 & 1 & 3 & -8 \end{bmatrix} \boldsymbol{x},\ \boldsymbol{x} \in \mathbb{R}^4$

(2) $T(\boldsymbol{x}) = \begin{bmatrix} 2 & 2 & 5 & -1 & 12 \\ -2 & -4 & 5 & 9 & 12 \\ 1 & -2 & -5 & -11 & -3 \\ 0 & -1 & 1 & 0 & 4 \end{bmatrix} \boldsymbol{x},\ \boldsymbol{x} \in R^5$

2. 行列の固有値, 固有ベクトルを求めよ.

(1) $\begin{bmatrix} 1 & 4 & 2 \\ -2 & -4 & -1 \\ 0 & -2 & -3 \end{bmatrix}$　(2) $\begin{bmatrix} -1 & -4 & -2 \\ 4 & 7 & 2 \\ -4 & -4 & 1 \end{bmatrix}$　(3) $\begin{bmatrix} 1 & -2 & -1 \\ 1 & 3 & 0 \\ 0 & 2 & 4 \end{bmatrix}$

3. 行列を対角化せよ.

(1) $\begin{bmatrix} 1 & -6 & -3 \\ -4 & 1 & 4 \\ -2 & -6 & 0 \end{bmatrix}$　(2) $\begin{bmatrix} 0 & -2 & -1 \\ 2 & 4 & 1 \\ -2 & -2 & 1 \end{bmatrix}$

4. シュミットの直交化を用いて, 次のベクトルから正規直交基底を求めよ.

(1) $\begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} -2 \\ -1 \\ 1 \end{bmatrix}$　(2) $\begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ -1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 2 \\ 2 \\ -1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 2 \\ 3 \\ -2 \end{bmatrix}$

5. 対称行列を直交対角化せよ.

(1) $\begin{bmatrix} -1 & 0 & -2 \\ 0 & -3 & 0 \\ -2 & 0 & -1 \end{bmatrix}$　(2) $\begin{bmatrix} 1 & -2 & -4 \\ -2 & -2 & 2 \\ -4 & 2 & 1 \end{bmatrix}$　(3) $\begin{bmatrix} -7 & 2 & -2 \\ 2 & -1 & 4 \\ -2 & 4 & -1 \end{bmatrix}$

裏へ続く

6. 2 次形式 $f(\boldsymbol{x}) = x_1^2 - 3x_1x_2 + x_2^2$ にたいして, $f(\boldsymbol{x}) = \boldsymbol{x}^T A\boldsymbol{x}$ となる行列 A を求めよ. 次に A を直交対角化し, $P^{-1}AP = D$ (D は対角行列, P は直交行列) としたとき, $\boldsymbol{y} = P^{-1}\boldsymbol{x}$ とおくことにより, f を標準型を求めよ.

7. 対角化できないような 2×2 行列を挙げよ. またその行列が対角化できないことを示せ.

8. 正則行列は 0 を固有値に持たないことを示せ.

9. 行列 A を対角化し, $P^{-1}AP = D$ (D は対角行列, P は正則行列) としたとき, D の対角成分が A の固有値に等しいことを示せ.