

# 線形代数 I: 余因子行列

## 逆行列の公式

3 × 3 行列

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{bmatrix}$$

に対して,

$$\tilde{A} = \begin{bmatrix} \begin{vmatrix} a_{22} & a_{23} \\ a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} & -\begin{vmatrix} a_{12} & a_{13} \\ a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} & \begin{vmatrix} a_{12} & a_{13} \\ a_{22} & a_{23} \end{vmatrix} \\ -\begin{vmatrix} a_{21} & a_{23} \\ a_{31} & a_{33} \end{vmatrix} & \begin{vmatrix} a_{11} & a_{13} \\ a_{31} & a_{33} \end{vmatrix} & -\begin{vmatrix} a_{11} & a_{13} \\ a_{21} & a_{23} \end{vmatrix} \\ \begin{vmatrix} a_{21} & a_{22} \\ a_{31} & a_{32} \end{vmatrix} & -\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{31} & a_{32} \end{vmatrix} & \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \Delta_{11} & \Delta_{21} & \Delta_{31} \\ \Delta_{12} & \Delta_{22} & \Delta_{32} \\ \Delta_{13} & \Delta_{23} & \Delta_{33} \end{bmatrix}$$

とおく. この  $\tilde{A}$  を  $A$  の余因子行列と呼び,  $\Delta_{11}$  を  $A$  の (1, 1) 余因子,  $\Delta_{12}$  を  $A$  の (1, 2) 余因子などと呼ぶ. ここで,  $(i, j)$  余因子の符号は  $(-1)^{i+j}$  に等しい. 例えば, (2, 1) 余因子  $\Delta_{21}$  の符号は  $(-1)^{2+1} = -1$  である.

**定理** (逆行列の公式).  $|A| \neq 0$  ならば,

$$A^{-1} = \frac{1}{|A|} \tilde{A}$$

が成り立つ.

**例.**

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 0 & -3 \\ 0 & 1 & 0 \\ 2 & 1 & -5 \end{bmatrix}$$

の逆行列を公式を用いて求める. 余因子はそれぞれ

$$\begin{aligned} \Delta_{11} &= (-1)^{(1+1)} \begin{vmatrix} 1 & 0 \\ 1 & -5 \end{vmatrix}, \Delta_{21} = (-1)^{(2+1)} \begin{vmatrix} 0 & -3 \\ 1 & -5 \end{vmatrix}, \Delta_{31} = (-1)^{(3+1)} \begin{vmatrix} 0 & -3 \\ 1 & 0 \end{vmatrix}, \\ \Delta_{12} &= (-1)^{(1+2)} \begin{vmatrix} 0 & 0 \\ 2 & -5 \end{vmatrix}, \Delta_{22} = (-1)^{(2+2)} \begin{vmatrix} 1 & -3 \\ 2 & -5 \end{vmatrix}, \Delta_{32} = (-1)^{(3+2)} \begin{vmatrix} 1 & -3 \\ 0 & 0 \end{vmatrix}, \\ \Delta_{13} &= (-1)^{(1+3)} \begin{vmatrix} 0 & 1 \\ 2 & 1 \end{vmatrix}, \Delta_{23} = (-1)^{(2+3)} \begin{vmatrix} 1 & 0 \\ 2 & 1 \end{vmatrix}, \Delta_{33} = (-1)^{(3+3)} \begin{vmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{vmatrix} \end{aligned}$$

であり,  $|A| = 1$  なので,

$$A^{-1} = \begin{bmatrix} -5 & -3 & 3 \\ 0 & 1 & 0 \\ -2 & -1 & 1 \end{bmatrix}$$

となる.

(公式の解説).

$$\begin{aligned} \frac{1}{|A|} \tilde{A}A &= \frac{1}{|A|} \begin{bmatrix} \begin{vmatrix} a_{22} & a_{23} \\ a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} & - \begin{vmatrix} a_{12} & a_{13} \\ a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} & \begin{vmatrix} a_{12} & a_{13} \\ a_{22} & a_{23} \end{vmatrix} \\ - \begin{vmatrix} a_{21} & a_{23} \\ a_{31} & a_{33} \end{vmatrix} & \begin{vmatrix} a_{11} & a_{13} \\ a_{31} & a_{33} \end{vmatrix} & - \begin{vmatrix} a_{11} & a_{13} \\ a_{21} & a_{23} \end{vmatrix} \\ \begin{vmatrix} a_{21} & a_{22} \\ a_{31} & a_{32} \end{vmatrix} & - \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{31} & a_{32} \end{vmatrix} & \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{bmatrix} \\ &= \frac{1}{|A|} \begin{bmatrix} a_{11} \begin{vmatrix} a_{22} & a_{23} \\ a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} - a_{21} \begin{vmatrix} a_{12} & a_{13} \\ a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} + a_{31} \begin{vmatrix} a_{12} & a_{13} \\ a_{22} & a_{23} \end{vmatrix} & * & * \\ -a_{11} \begin{vmatrix} a_{21} & a_{23} \\ a_{31} & a_{33} \end{vmatrix} + a_{21} \begin{vmatrix} a_{11} & a_{13} \\ a_{31} & a_{33} \end{vmatrix} - a_{31} \begin{vmatrix} a_{11} & a_{13} \\ a_{21} & a_{23} \end{vmatrix} & * & * \\ a_{11} \begin{vmatrix} a_{21} & a_{22} \\ a_{31} & a_{32} \end{vmatrix} - a_{21} \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{31} & a_{32} \end{vmatrix} + a_{31} \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} & * & * \end{bmatrix} \quad (2, 3 \text{ 列は省略}) \end{aligned}$$

となるので, 右辺の 1 行 1 列の要素を計算すると

$$\begin{aligned} &a_{11} \begin{vmatrix} a_{22} & a_{23} \\ a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} - a_{21} \begin{vmatrix} a_{12} & a_{13} \\ a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} + a_{31} \begin{vmatrix} a_{12} & a_{13} \\ a_{22} & a_{23} \end{vmatrix} \\ &= \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ 0 & a_{22} & a_{23} \\ 0 & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} 0 & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ 0 & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} 0 & a_{12} & a_{13} \\ 0 & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} = |A| \end{aligned}$$

となる (余因子展開を用いる). 右辺の 2 行 1 列は

$$\begin{aligned} &-a_{11} \begin{vmatrix} a_{21} & a_{23} \\ a_{31} & a_{33} \end{vmatrix} + a_{21} \begin{vmatrix} a_{11} & a_{13} \\ a_{31} & a_{33} \end{vmatrix} - a_{31} \begin{vmatrix} a_{11} & a_{13} \\ a_{21} & a_{23} \end{vmatrix} \\ &= \begin{vmatrix} a_{11} & a_{11} & a_{13} \\ a_{21} & 0 & a_{23} \\ a_{31} & 0 & a_{33} \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} a_{11} & 0 & a_{13} \\ a_{21} & a_{21} & a_{23} \\ a_{31} & 0 & a_{33} \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} a_{11} & 0 & a_{13} \\ a_{21} & 0 & a_{23} \\ a_{31} & a_{31} & a_{33} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{11} & a_{13} \\ a_{21} & a_{21} & a_{23} \\ a_{31} & a_{31} & a_{33} \end{vmatrix} = 0 \end{aligned}$$

となる (同じ行があると行列式は 0) ので, 同様に計算すると,

$$\frac{1}{|A|} \tilde{A}A = \frac{1}{|A|} \begin{bmatrix} |A| & 0 & 0 \\ 0 & |A| & 0 \\ 0 & 0 & |A| \end{bmatrix} = E$$

が成り立つ. また同様に

$$A \left( \frac{1}{|A|} \tilde{A} \right) = E$$

も示せるので,  $\frac{1}{|A|} \tilde{A} = A^{-1}$  である.

□