線形代数 II　自習問題　(2010 年度, 担当: 関口 良行)

1. 自習用の問題です. テスト勉強に役立ててください
2. 実際の試験では, 問題数は少なくなります.
3. 答えは非公開です. 自力, または友人と相談して解いてください.
4. 質問は受け付けますが, 直接答えは聞かないでください.

1. 行列の固有値, 固有ベクトルを求めよ.

(1) $\begin{bmatrix} 1 & 4 & 2 \\ -2 & -4 & -1 \\ 0 & -2 & -3 \end{bmatrix}$ (2) $\begin{bmatrix} -1 & -4 & -2 \\ 4 & 7 & 2 \\ -4 & -4 & 1 \end{bmatrix}$ (3) $\begin{bmatrix} 1 & -2 & -1 \\ 1 & 3 & 0 \\ 0 & 2 & 4 \end{bmatrix}$

2. 行列を対角化せよ.

(1) $\begin{bmatrix} 1 & -6 & -3 \\ -4 & 1 & 4 \\ -2 & -6 & 0 \end{bmatrix}$ (2) $\begin{bmatrix} 0 & -2 & -1 \\ 2 & 4 & 1 \\ -2 & -2 & 1 \end{bmatrix}$

3. シュミットの正規直交化を用いて, 次のベクトルから正規直交基底を求めよ.

(1) $\begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} -2 \\ -1 \\ 1 \end{bmatrix}$ (2) $\begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ -1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 2 \\ 2 \\ -1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 2 \\ 3 \\ -2 \end{bmatrix}$

4. 次の連立方程式について, 解集合の正規直交基底を求めよ.

(1) $\begin{cases} x - 2y + z - 3w = 0 \\ -2x + 4y - 2z + 6w = 0 \end{cases}$

(2) $\begin{cases} x + y + 3z = 0 \\ x + 2y + 5z - 2v - 5w = 0 \\ x + y + 3z + v + 2w = 0 \end{cases}$

5. 対称行列を直交対角化せよ.

(1) $\begin{bmatrix} -1 & 0 & -2 \\ 0 & -3 & 0 \\ -2 & 0 & -1 \end{bmatrix}$ (2) $\begin{bmatrix} 1 & -2 & -4 \\ -2 & -2 & 2 \\ -4 & 2 & 1 \end{bmatrix}$ (3) $\begin{bmatrix} -7 & 2 & -2 \\ 2 & -1 & 4 \\ -2 & 4 & -1 \end{bmatrix}$

6. 次の数列の一般項を求めよ.

(1) $\begin{cases} x_n = x_{n-1} + y_{n-1} \\ y_n = 5x_{n-1} - 3y_{n-1} \end{cases}, \ x_0 = 1, y_0 = 0.$

(2) $\begin{cases} x_n = 4x_{n-1} - 6y_{n-1} \\ y_n = x_{n-1} - y_{n-1} \end{cases}, \ x_0 = 2, y_0 = -1.$

裏へ続く

7. 次の二次曲線の標準形を求め, 講義中に指示した要点に注意して曲線の概形を図示せよ.

   (1) $x^2 - 4xy - 2y^2 + 2x - 16y - 11 = 0$

   (2) $14x^2 - 24xy + 21y^2 + 9x - 12y = 0$

   (3) $x^2 - 2xy + y^2 - 8x + 16 = 0$

二次曲線を図示するときの要点

(試験問題には書かず, 以下の要点については質問も受け付けないので, 覚えてくること)

1. 標準形はどのような曲線か明記 (楕円, 双曲線, 放物線など)

2. 標準形を得るのに用いた座標の原点と各軸の向き記入

3. 楕円の場合はどの向きに短径, 長径があるか, 双曲線の場合は新しい座標の軸のうちどちらの軸と交わっているか, 放物線の場合はどの方向に曲線が開いているかがわかるように書く.