線形代数 II: 対称行列

1　対称行列の固有ベクトル

定義. A を実正方行列とする. $A^t = A$ のとき, A を対称行列と呼ぶ.

解説. 対称行列は行列の成分が対角成分に対して, 対称である行列である. 例えば以下は対称行列である;

$$\begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 2 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 1 & 2 & -1 \\ 2 & -2 & 2 \\ -1 & 2 & 1 \end{bmatrix}.$$

定理 1. A を対称行列, λ_1, λ_2 を A の異なる固有値とする . このとき λ_1 の固有ベクトルと λ_2 の固有ベクトルは直交する.

例.

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & -1 \\ 2 & -2 & 2 \\ -1 & 2 & 1 \end{bmatrix}$$

は対称行列であり, 固有値と固有ベクトルの組はそれぞれ

$$\lambda_1 = 2, \begin{bmatrix} 2 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}, \quad \lambda_2 = -4, \begin{bmatrix} 1 \\ -2 \\ 1 \end{bmatrix}$$

となる. このとき, $\lambda_1 = 2$ と $\lambda_2 = -4$ の固有ベクトルは

$$\left\langle \begin{bmatrix} 2 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 1 \\ -2 \\ 1 \end{bmatrix} \right\rangle = 0,$$
$$\left\langle \begin{bmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 1 \\ -2 \\ 1 \end{bmatrix} \right\rangle = 0$$

となるので, 直交している. 一方, $\lambda_2 = 2$ の 2 つの固有ベクトルは

$$\left\langle \begin{bmatrix} 2 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} \right\rangle = -2$$

となるので直交していない.

注意. 転置に関する注意事項. 内積は $\langle \boldsymbol{x}, \boldsymbol{y} \rangle = \boldsymbol{x}^T \boldsymbol{y}$ と書ける. また, $(A\boldsymbol{x})^T = \boldsymbol{x}^T A^T$ となる.

定理 1 の証明. λ_1 の固有ベクトルを $\boldsymbol{x}$, λ_2 の固有ベクトルを $\boldsymbol{y}$ とする. このとき, $A\boldsymbol{x} = \lambda_1 \boldsymbol{x}$, $A\boldsymbol{y} = \lambda_2 \boldsymbol{y}$ なので,

$$\begin{aligned}\lambda_1 \langle \boldsymbol{x}, \boldsymbol{y} \rangle &= \lambda \boldsymbol{x}^T \boldsymbol{y} = (\lambda \boldsymbol{x}^T) \boldsymbol{y} = (A\boldsymbol{x})^T \boldsymbol{y} = \boldsymbol{x}^T A^T \boldsymbol{y} \\ &(A \text{ は対称行列なので}) = \boldsymbol{x}^T A \boldsymbol{y} = \boldsymbol{x}^T (A\boldsymbol{y}) = \boldsymbol{x}^T \lambda_2 \boldsymbol{y} = \lambda_2 \boldsymbol{x}^T \boldsymbol{y} = \lambda_2 \langle \boldsymbol{x}, \boldsymbol{y} \rangle\end{aligned}$$

となる. よって,

$$(\lambda_1 - \lambda_2) \langle \boldsymbol{x}, \boldsymbol{y} \rangle = 0$$

を得る. したがって $\lambda_1 \neq \lambda_2$ より, $\langle \boldsymbol{x}, \boldsymbol{y} \rangle = 0$ が成り立つ. □

2 対称行列の直交対角化

証明は省略するが, 次の定理が成り立つ. まず用語を用意する.

定義. 正規直交基底を列ベクトルとして並べた行列を直交行列という.

補足. A が直交行列であれば, $A^T A = E$ となる. これより $A^{-1} = A^T$ が成り立つ.

定理 2. すべての対称行列は直交行列で対角化できる.

例.

$$A = \begin{bmatrix} 2 & 2 & -1 \\ 2 & -1 & 2 \\ -1 & 2 & 2 \end{bmatrix}$$

A は対称行列である. まず, 固有値と固有ベクトルを求めると,

$$\lambda = 3, \boldsymbol{x}_1 = \begin{bmatrix} 2 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}, \boldsymbol{x}_2 = \begin{bmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}, \quad \lambda = -3, \boldsymbol{x}_3 = \begin{bmatrix} 1 \\ -2 \\ 1 \end{bmatrix}$$

となる. これを正規直交化する. ここで, 定理 1 より, 異なる固有値の固有ベクトルは直交している (実際に確認してみよ). よって, $\lambda = 3$ の 固有ベクトル $\boldsymbol{x}_1, \boldsymbol{x}_2$ だけ正規直交化し, $\lambda = -3$ の固有ベクトル $\boldsymbol{x}_3$ は正規化のみ行う (ノルムを 1 にする).

シュミットの正規直交化により,

$$\boldsymbol{y}_1 = \frac{\boldsymbol{x}_1}{\|\boldsymbol{x}_1\|} = \frac{1}{\sqrt{5}}\begin{bmatrix}2\\1\\0\end{bmatrix},$$

$$\tilde{\boldsymbol{y}}_2 = \boldsymbol{x}_2 - \langle \boldsymbol{y}_1, \boldsymbol{x}_2\rangle = \frac{1}{5}\begin{bmatrix}-1\\2\\5\end{bmatrix},$$

$$\boldsymbol{y}_2 = \frac{\tilde{\boldsymbol{y}}_2}{\|\tilde{\boldsymbol{y}}_2\|} = \frac{1}{\sqrt{30}}\begin{bmatrix}-1\\2\\5\end{bmatrix}$$

を得る. このとき, $\boldsymbol{y}_1, \boldsymbol{y}_2$ は $\lambda = 3$ の固有ベクトルである.
　次に $\boldsymbol{x}_3$ のノルムを 1 にすると,

$$\frac{\boldsymbol{x}_3}{\|\boldsymbol{x}_3\|} = \frac{1}{\sqrt{6}}\begin{bmatrix}1\\-2\\1\end{bmatrix}$$

となり, 正規直交基底

$$\left\{\frac{1}{\sqrt{5}}\begin{bmatrix}2\\1\\0\end{bmatrix}, \frac{1}{\sqrt{30}}\begin{bmatrix}-1\\2\\5\end{bmatrix}, \frac{1}{\sqrt{6}}\begin{bmatrix}1\\-2\\1\end{bmatrix}\right\}$$

が得られる. ここで, すべて A の固有ベクトルになっていることに注意すると, それらを並べて,

$$A\begin{bmatrix}2/\sqrt{5} & -1/\sqrt{30} & 1/\sqrt{6}\\ 1/\sqrt{5} & 2/\sqrt{30} & -2/\sqrt{6}\\ 0 & 5/\sqrt{30} & 1/\sqrt{6}\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}2/\sqrt{5} & -1/\sqrt{30} & 1/\sqrt{6}\\ 1/\sqrt{5} & 2/\sqrt{30} & -2/\sqrt{6}\\ 0 & 5/\sqrt{30} & 1/\sqrt{6}\end{bmatrix}\begin{bmatrix}3 & 0 & 0\\ 0 & 3 & 0\\ 0 & 0 & -3\end{bmatrix}$$

が成り立つ. よって, $P = \begin{bmatrix}2/\sqrt{5} & -1/\sqrt{30} & 1/\sqrt{6}\\ 1/\sqrt{5} & 2/\sqrt{30} & -2/\sqrt{6}\\ 0 & 5/\sqrt{30} & 1/\sqrt{6}\end{bmatrix}$ とおくと,

$$P^{-1}AP = \begin{bmatrix}3 & 0 & 0\\ 0 & 3 & 0\\ 0 & 0 & -3\end{bmatrix}$$

と直交行列で対角化できる. なお

$$P^{-1} = P^T = \begin{bmatrix}2/\sqrt{5} & 1/\sqrt{5} & 0\\ -1/\sqrt{30} & 2/\sqrt{30} & 5/\sqrt{30}\\ 1/\sqrt{6} & -2/\sqrt{6} & 1/\sqrt{6}\end{bmatrix}$$

である.