線形代数 II: 正規直交基底

定義. $\mathbb{R}^3$ のベクトル $\{\boldsymbol{y}_1, \boldsymbol{y}_2, \boldsymbol{y}_3\}$ が正規直交基底であるとは,

(1). $\{\boldsymbol{y}_1, \boldsymbol{y}_2, \boldsymbol{y}_3\}$ は $\mathbb{R}^3$ の基底

(2). (互いに直交) $\langle \boldsymbol{y}_1, \boldsymbol{y}_2 \rangle = 0$, $\langle \boldsymbol{y}_2, \boldsymbol{y}_3 \rangle = 0$, $\langle \boldsymbol{y}_3, \boldsymbol{y}_1 \rangle = 0$

(3). (長さが 1) $\|\boldsymbol{y}_i\| = 1$ $(i = 1, 2, 3)$

シュミッドの正規直交化

$\{\boldsymbol{x}_1, \boldsymbol{x}_2, \boldsymbol{x}_3\}$ を $\mathbb{R}^3$ の基底とする. このとき, これらから正規直交基底 $\{\boldsymbol{y}_1, \boldsymbol{y}_2, \boldsymbol{y}_3\}$ を作ることができる. 以下の方法を**シュミッドの正規直交化**と呼ぶ.

Step 1. $\boldsymbol{y}_1 = \dfrac{\boldsymbol{x}_1}{\|\boldsymbol{x}_1\|}$ とおく.
すると, $\|y_1\| = 1$ となる. (定義 (3))

Step 2-1. $\tilde{\boldsymbol{y}}_2 = \boldsymbol{x}_2 - \langle \boldsymbol{y}_1, \boldsymbol{x}_2 \rangle \boldsymbol{y}_1$ とおく.
すると, $\langle \boldsymbol{y}_1, \tilde{\boldsymbol{y}}_2 \rangle = 0$ が成り立つ. (定義 (2)) 実際に計算してみると,

$$\begin{aligned}\langle \boldsymbol{y}_1, \tilde{\boldsymbol{y}}_2 \rangle &= \langle \boldsymbol{y}_1, (\boldsymbol{x}_2 - \langle \boldsymbol{y}_1, \boldsymbol{x}_2 \rangle \boldsymbol{y}_1) \rangle = \langle \boldsymbol{y}_1, \boldsymbol{x}_2 \rangle - \langle \boldsymbol{y}_1, \langle \boldsymbol{y}_1, \boldsymbol{x}_2 \rangle \boldsymbol{y}_1 \rangle \\ &= \langle \boldsymbol{y}_1, \boldsymbol{x}_2 \rangle - \big(\langle \boldsymbol{y}_1, \boldsymbol{x}_2 \rangle\big) \langle \boldsymbol{y}_1, \boldsymbol{y}_1 \rangle = \langle \boldsymbol{y}_1, \boldsymbol{x}_2 \rangle - \langle \boldsymbol{y}_1, \boldsymbol{x}_2 \rangle = 0\end{aligned}$$

を得る.

Step 2-2. $\boldsymbol{y}_2 = \dfrac{\tilde{\boldsymbol{y}}_2}{\|\tilde{\boldsymbol{y}}_2\|}$ とおく.
$\boldsymbol{y}_1$ は $\tilde{\boldsymbol{y}}_2$ の向きを変えずに長さを変えただけのベクトルなので, $\langle \boldsymbol{y}_1, \boldsymbol{y}_2 \rangle = 0$ かつ $\|\boldsymbol{y}_2\| = 1$ となる. (定義 (2), (3))

Step 3-1. $\tilde{\boldsymbol{y}}_3 = \boldsymbol{x}_3 - \langle \boldsymbol{y}_1, \boldsymbol{x}_3 \rangle \boldsymbol{y}_1 - \langle \boldsymbol{y}_2, \boldsymbol{x}_3 \rangle \boldsymbol{y}_2$ とおく.
すると, $\langle \boldsymbol{y}_1, \tilde{\boldsymbol{y}}_3 \rangle = 0$, $\langle \boldsymbol{y}_2, \tilde{\boldsymbol{y}}_3 \rangle = 0$ が成り立つ. (定義 (2)) 実際に $\boldsymbol{y}_1$ と $\boldsymbol{y}_2$ が直交しているのと y_2 の大きさが 1 であるので,

$$\begin{aligned}\langle \boldsymbol{y}_1, \tilde{\boldsymbol{y}}_3 \rangle &= \langle \boldsymbol{y}_1, \boldsymbol{x}_3 \rangle - \langle \boldsymbol{y}_1, \langle \boldsymbol{y}_1, \boldsymbol{x}_3 \rangle \boldsymbol{y}_1 \rangle - 0 = 0 \\ \langle \boldsymbol{y}_2, \tilde{\boldsymbol{y}}_3 \rangle &= \langle \boldsymbol{y}_2, \boldsymbol{x}_3 \rangle - 0 - \langle \boldsymbol{y}_2, \langle \boldsymbol{y}_2, \boldsymbol{x}_3 \rangle \boldsymbol{y}_2 \rangle = 0\end{aligned}$$

を得る.

Step 3-2. $\boldsymbol{y}_3 = \dfrac{\tilde{\boldsymbol{y}}_3}{\|\tilde{\boldsymbol{y}}_3\|}$ とおく.
同様に, $\langle \boldsymbol{y}_1, \boldsymbol{y}_3 \rangle = 0$, $\langle \boldsymbol{y}_2, \boldsymbol{y}_3 \rangle = 0$ かつ $\|\boldsymbol{y}_3\| = 1$ となる. (定義 (2), (3))

例. 次のベクトルをシュミットの正規直交化で正規直交化せよ.

$$\begin{bmatrix}0\\1\\1\end{bmatrix},\ \begin{bmatrix}1\\1\\1\end{bmatrix},\ \begin{bmatrix}1\\0\\1\end{bmatrix}$$

(解答例) ベクトルを左から順に $\boldsymbol{x}_1, \boldsymbol{x}_2, \boldsymbol{x}_3$ とおき, シュミットの直交化で正規直交基底 $\boldsymbol{y}_1, \boldsymbol{y}_2, \boldsymbol{y}_3$ を得る.

$$\begin{aligned}
\boldsymbol{y}_1 &= \frac{\boldsymbol{x}_1}{\|\boldsymbol{x}_1\|} = \frac{1}{\sqrt{0^2+1^2+1^2}}\begin{bmatrix}0\\1\\1\end{bmatrix} = \frac{1}{\sqrt{2}}\begin{bmatrix}0\\1\\1\end{bmatrix},\\
\tilde{\boldsymbol{y}}_2 &= \boldsymbol{x}_2 - \langle \boldsymbol{y}_1, \boldsymbol{x}_2\rangle \boldsymbol{y}_1 = \begin{bmatrix}1\\1\\1\end{bmatrix} - \left\langle \frac{1}{\sqrt{2}}\begin{bmatrix}0\\1\\1\end{bmatrix}, \begin{bmatrix}1\\1\\1\end{bmatrix}\right\rangle \cdot \frac{1}{\sqrt{2}}\begin{bmatrix}0\\1\\1\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}1\\0\\0\end{bmatrix},\\
\boldsymbol{y}_2 &= \frac{\tilde{\boldsymbol{y}}_2}{\|\tilde{\boldsymbol{y}}_2\|} = \frac{1}{\sqrt{1^2+0^2+0^2}}\begin{bmatrix}1\\0\\0\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}1\\0\\0\end{bmatrix},\\
\tilde{\boldsymbol{y}}_3 &= \boldsymbol{x}_3 - \langle \boldsymbol{y}_1, \boldsymbol{x}_3\rangle \boldsymbol{y}_1 - \langle \boldsymbol{y}_2, \boldsymbol{x}_3\rangle \boldsymbol{y}_2\\
&= \begin{bmatrix}1\\0\\1\end{bmatrix} - \left\langle \frac{1}{\sqrt{2}}\begin{bmatrix}0\\1\\1\end{bmatrix}, \begin{bmatrix}1\\0\\1\end{bmatrix}\right\rangle \cdot \frac{1}{\sqrt{2}}\begin{bmatrix}0\\1\\1\end{bmatrix} - \left\langle \begin{bmatrix}1\\0\\0\end{bmatrix}, \begin{bmatrix}1\\0\\1\end{bmatrix}\right\rangle \cdot \begin{bmatrix}1\\0\\0\end{bmatrix}\\
&= \frac{1}{2}\begin{bmatrix}0\\-1\\1\end{bmatrix},\\
\boldsymbol{y}_3 &= \frac{\tilde{\boldsymbol{y}}_3}{\|\tilde{\boldsymbol{y}}_3\|} = \frac{1}{\sqrt{2}}\begin{bmatrix}0\\-1\\1\end{bmatrix}.
\end{aligned}$$

答え　$\frac{1}{\sqrt{2}}\begin{bmatrix}0\\1\\1\end{bmatrix},\ \begin{bmatrix}1\\0\\0\end{bmatrix},\ \frac{1}{\sqrt{2}}\begin{bmatrix}0\\-1\\1\end{bmatrix}.$

(**注意**) 左のベクトルから順番にシュミットの直交化を行うと上の結果が得られる. もし, ほかの順番で行えば, 別の正規直交基底が得られる.