線形代数 II: ベクトル空間と部分空間

1　ベクトル空間

$\boldsymbol{x} = (x_1, x_2, x_3)$, $\boldsymbol{y} = (y_1, y_2, y_3)$ を $\mathbb{R}^3$ のベクトルとする．するとベクトルの和とスカラー倍が

和 $\boldsymbol{x} + \boldsymbol{y} = (x_1 + y_1, x_2 + y_2, x_3 + y_3)$

スカラー倍 $\alpha\boldsymbol{x} = (\alpha x_1, \alpha x_2, \alpha x_3)$　(α は実数)

と定義され, (当然であるが) $\boldsymbol{x} + \boldsymbol{y}$, $\alpha\boldsymbol{x}$ もまた $\mathbb{R}^3$ の要素となる．さらに, 和とスカラー倍は以下の (1) から (8) の性質を満たすことが確認できる;

(1). $(\boldsymbol{x} + \boldsymbol{y}) + \boldsymbol{z} = \boldsymbol{x} + (\boldsymbol{y} + \boldsymbol{z})$

(2). $\boldsymbol{x} + \boldsymbol{y} = \boldsymbol{y} + \boldsymbol{x}$

(3). $\boldsymbol{x} + \boldsymbol{0} = \boldsymbol{x}$

(4). $\boldsymbol{x} + (-\boldsymbol{x}) = \boldsymbol{0}$

(5). $c(\boldsymbol{x} + \boldsymbol{y}) = c\boldsymbol{x} + c\boldsymbol{y}$

(6). $(c + d)\boldsymbol{x} = c\boldsymbol{x} + d\boldsymbol{x}$

(7). $(cd)\boldsymbol{x} = c(d\boldsymbol{x}) = d(c\boldsymbol{x})$

(8). $1\boldsymbol{x} = \boldsymbol{x}$

このように和とスカラー倍がまた元の集合に入り, (1) から (8) の性質を持つような集合を**ベクトル空間**と呼ぶ．(1) から (8) までの性質は自然に成り立つので, この講義では**ある集合の要素の和とスカラー倍がまた元の集合に入る**ことだけ注意すれば良い．

例 1. $\mathbb{R}^n$ の要素 $\boldsymbol{x} = (x_1, \dots, x_n)$, $\boldsymbol{y} = (y_1, \dots, y_n)$ に対して, 和とスカラー倍を

$$\boldsymbol{x} + \boldsymbol{y} = (x_1 + y_1, \dots, x_n + y_n)$$
$$\alpha\boldsymbol{x} = (\alpha x_1, \dots, \alpha y_n)$$

と定義すると, $\mathbb{R}^n$ はベクトル空間になる．

例 2. 2 次の多項式 $p(x) = a_2x^2 + a_1x + a_0$, $q(x) = b_2x^2 + b_1x + b_0$ に対して, 和とスカラー倍を

$$(p+q)(x) = (a_2+b_2)x^2 + (a_1+b_1)x + a_0 + b_0$$
$$(\alpha p)(x) = \alpha a_2x^2 + \alpha a_1x + \alpha a_0$$

と定義すると, 和とスカラー倍がまた 2 次の多項式になっているので, 2 次の多項式の集合はベクトル空間になる.

例 3. 連続関数 f, g に対して, 和とスカラー倍を

$$(f+g)(x) = f(x) + g(x)$$
$$(\alpha f)(x) = \alpha f(x)$$

と定義すると, 連続関数の集合はベクトル空間になる.

例えば, $f(x) = \sin(x)$, $g(x) = \cos(x)$ とすると,

$$(f+g)(x) = \sin(x) + \cos(x) = \sqrt{2}\sin(x + \pi/4)$$

とり, f と g から新しい関数 $f+g$ ができるが, $f+g$ も連続関数である. また, スカラー倍 $(\alpha f)(x) = \alpha\sin(x)$ も連続関数なので, 和とスカラー倍が連続関数の集合に入っている.

2 ベクトル空間の部分空間

講義では $\mathbb{R}^n$ の部分空間ののみを扱う.

まず, 座標平面 $\mathbb{R}^2$ のベクトルの和とスカラー倍はもちろん $\mathbb{R}^2$ に入るからベクトル空間である. 一方, 座標空間 $\mathbb{R}^3$ の xy 平面は座標平面 $\mathbb{R}^2$ になっている. よって, ベクトル空間 $\mathbb{R}^3$ の中に別のベクトル空間があることになる. このように, あるベクトル空間の中にある別のベクトル空間を**部分空間**と呼ぶ. 以下に代数的な定義を挙げよう.

定義. W を $\mathbb{R}^n$ の部分集合とする. このとき W のベクトル $\boldsymbol{x}$, $\boldsymbol{y}$ に対して, 和とスカラー倍

$$\boldsymbol{x} + \boldsymbol{y}$$
$$\alpha\boldsymbol{x}$$

が, また W に入るとき, W を $\mathbb{R}^n$ の**部分空間**と呼ぶ.

実際, R^3 の xy 平面を W_0 とする. W_0 のベクトルは, $\boldsymbol{p} = (x_1, y_1, 0)$, $\boldsymbol{q} = (x_2, y_2, 0)$ と書け, 和とスカラー倍は

$$\boldsymbol{p} + \boldsymbol{q} = (x_1 + x_2, y_1 + y_2, 0)$$
$$\alpha\boldsymbol{p} = (\alpha x_1, \alpha y_1, 0)$$

となり, また W_0 に入る. 従って, W_0 は上記の定義を満たす.

例 4. $\mathbb{R}^3$ の xy 平面を原点を含んだまま傾けたものも R^3 の中の別のベクトル空間になる.

例えば, $x+2y+3z=0$ を満たす (x,y,z) の集合を V とすると, V は原点を含む平面である. V の点 $\boldsymbol{p}=(x_1,y_1,z_1)$ と $\boldsymbol{q}=(x_2,y_2,z_2)$ に対して, 和とスカラー倍が, また V の点になるか調べてみよう.

いま, $\boldsymbol{p}$ と $\boldsymbol{q}$ は V の点なので,

$$x_1+2y_1+3z_1=0, \quad x_2+2y_2+3z_2=0$$

が成り立つ. ここで, ベクトルの和 $\boldsymbol{p}+\boldsymbol{q}=(x_1+x_2, y_1+y_2, z_1+z_2)$ を平面 V の式に代入すると,

$$\begin{aligned}(x_1+x_2)+2(y_1+y_2)+3(z_1+z_2) &= (x_1+2y_1+3z_1)+(x_2+2y_2+3z_2)\\ &= 0+0=0\end{aligned}$$

となり, $\boldsymbol{p}+\boldsymbol{q}$ が V の点であることがわかる. また, スカラー倍 $\alpha\boldsymbol{p}$ を平面 V の式に代入すると,

$$(\alpha x_1)+2(\alpha y_1)+3(\alpha z_1)=\alpha(x_1+2y_1+3z_1)=\alpha\cdot 0=0$$

であるので, $\alpha\boldsymbol{p}$ も V の点であることがわかる. 従って, V は $\mathbb{R}^3$ の部分空間である.

注意

$\mathbb{R}^3$ の平面で原点を含まないものは**部分空間ではない**. 実際平面 $x+y+z=1$ を V_1 とすると, V_1 は原点を含まない平面になっている. いま, $\boldsymbol{p}=(1,0,0)$ と $\boldsymbol{q}=(0,1,0)$ は V_1 の点である. しかし, $\boldsymbol{p}+\boldsymbol{q}=(1,1,0)$ は平面 V_1 の式を満たさない. したがって, ベクトルの和が V_1 からはみ出してしまう.

例 5. $\mathbb{R}^3$ の原点を含む直線も部分空間になっている. 例えば, $\frac{x}{2}=\frac{y}{3}=\frac{z}{4}$ を満たす (x,y,z) の集合を U とすると, U は原点を通る直線になっている. U の点 $\boldsymbol{p}=(x_1,y_1,z_1)$ と $\boldsymbol{q}=(x_2,y_2,z_2)$ に対して,

$$\frac{x_1}{2}=\frac{y_1}{3}=\frac{z_1}{4}, \quad \frac{x_2}{2}=\frac{y_2}{3}=\frac{z_2}{4}$$

が成り立つ. $\boldsymbol{p}+\boldsymbol{q}$ を直線 U の式の左辺に代入すると,

$$\frac{x_1+x_2}{2}=\frac{x_1}{2}+\frac{x_2}{2}=\frac{y_1}{3}+\frac{y_2}{3}=\frac{y_1+y_2}{3}$$

が成り立つ. 右辺についても同様にすると,

$$\frac{x_1+x_2}{2}=\frac{y_1+y_2}{3}=\frac{z_1+z_2}{4}$$

となるので, $\boldsymbol{p}+\boldsymbol{q}$ も直線 U 上の点になる. スカラー倍についても同様である.

補足

上の例を別の面から考えてみよう, 数直線 $\mathbb{R}$ は普通の数の足し算でベクトル空間になる. また, 座標平面 $\mathbb{R}^2$ の x 軸は数直線 $\mathbb{R}$ なので, 数直線 $\mathbb{R}$ はベクトル空間 $\mathbb{R}^2$ の中の別のベクトル空間になっている. また, $\mathbb{R}^3$ の xy 平面は座標平面 $\mathbb{R}^2$ になっている. これより, $\mathbb{R}^3$ の x 軸は数直線 $\mathbb{R}$ になっていて, ベクトル空間 $\mathbb{R}^3$ の中の別のベクトル空間になっていることがわかるだろう. よって x 軸を原点を含んだまま傾けたもの, 言い換えると原点を含む直線は $\mathbb{R}^3$ の中の別のベクトル空間 (部分空間) になっている.