行列式と体積

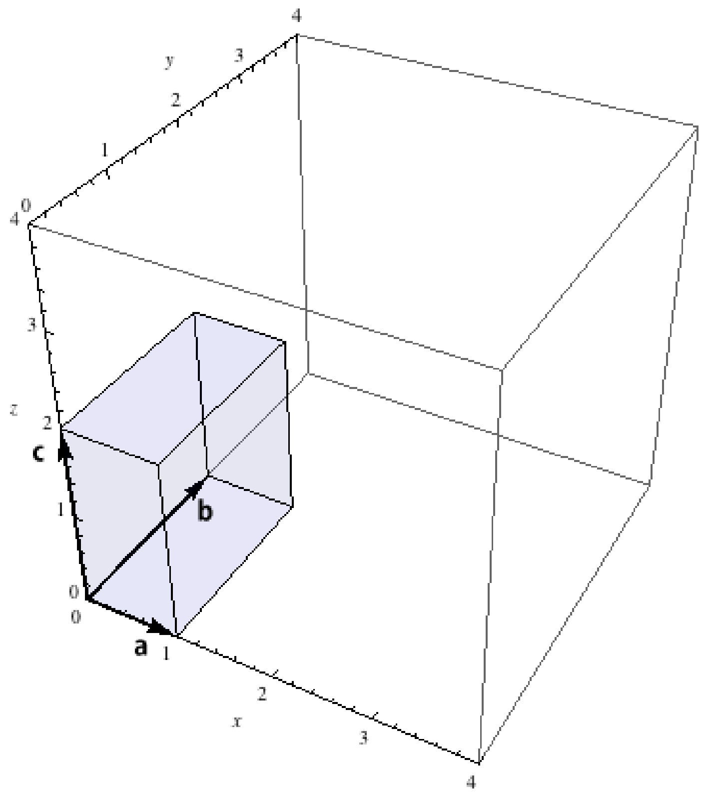
3 次正方行列 A の行列式は各列ベクトルの作る立体の体積の絶対値に等しいことを説明した. また, 各**行ベクトル**の作る立体の体積にも等しいことが示される (証明は教科書).

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \boldsymbol{a} \\ \boldsymbol{b} \\ \boldsymbol{c} \end{bmatrix}$$

とする. $(\boldsymbol{a} = (1,0,0),\ \boldsymbol{b} = (0,2,0),\ \boldsymbol{c} = (0,0,3))$

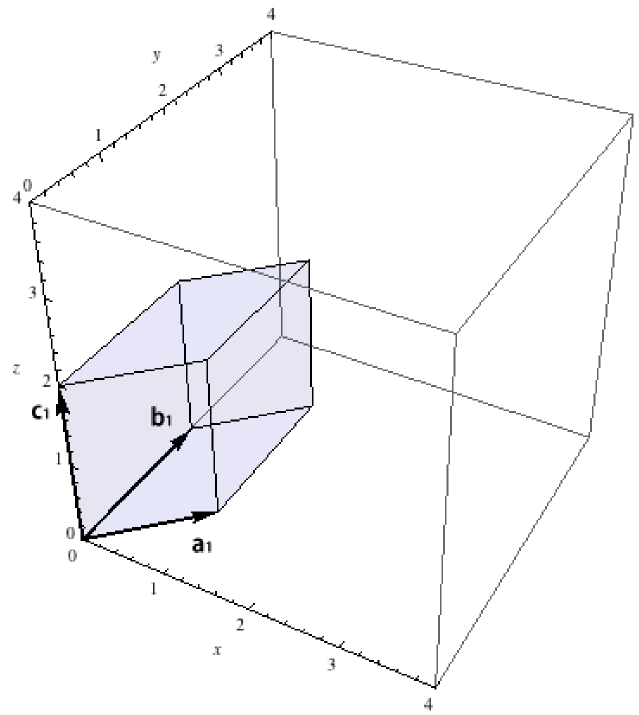
このプリントでは, 体積に関する性質を用いて行列式の変形を説明する. 別途講義で, 以下の性質を改めて行列式の定義式から示す.

- 立体の体積は $\begin{vmatrix} \boldsymbol{a} \\ \boldsymbol{b} \\ \boldsymbol{c} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{vmatrix} = 4$ に等しい

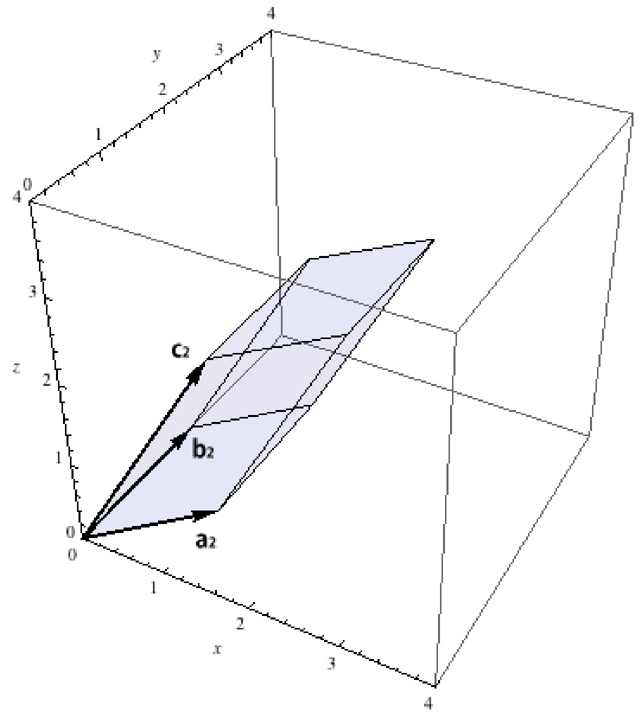


注意 もし $\boldsymbol{a}$, $\boldsymbol{b}$, $\boldsymbol{c}$ の中に同じベクトルがあると, 立体がつぶれて, 体積はゼロになる. 例えば $\begin{vmatrix} \boldsymbol{a} \\ \boldsymbol{b} \\ \boldsymbol{b} \end{vmatrix} = 0$ である.

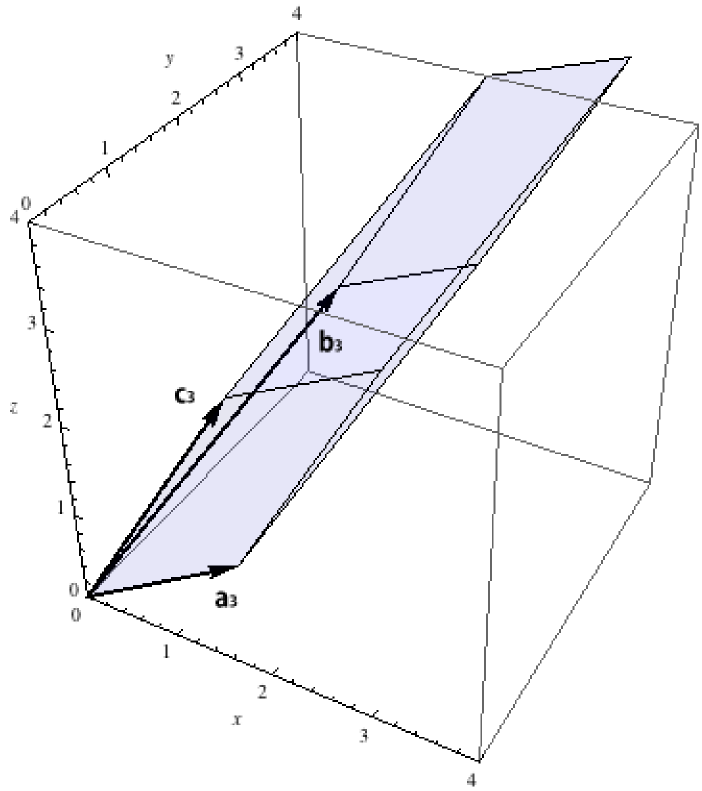
- 底面のベクトル $\boldsymbol{a}$ の終点を $\boldsymbol{b}$ の方向に動かしても底面積は変わらない ($\boldsymbol{a}$ に $\boldsymbol{b}$ の定数倍を足す). よって, 体積も変わらないので, $\begin{vmatrix} \boldsymbol{a} \\ \boldsymbol{b} \\ \boldsymbol{c} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} \boldsymbol{a} + (1/2)\boldsymbol{b} \\ \boldsymbol{b} \\ \boldsymbol{c} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{vmatrix} \left(= \begin{vmatrix} \boldsymbol{a}_1 \\ \boldsymbol{b}_1 \\ \boldsymbol{c}_1 \end{vmatrix} \text{とおく} \right)$



- 垂直なベクトル $\boldsymbol{c}_1$ の終点をベクトル $\boldsymbol{a}_1$ の方向に動かしても, 立体の高さは変わらないので,
$\begin{vmatrix} \boldsymbol{a}_1 \\ \boldsymbol{b}_1 \\ \boldsymbol{c}_1 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} \boldsymbol{a}_1 \\ \boldsymbol{b}_1 \\ \boldsymbol{c}_1 + \boldsymbol{a}_1 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 1 & 1 & 2 \end{vmatrix} \left(= \begin{vmatrix} \boldsymbol{a}_2 \\ \boldsymbol{b}_2 \\ \boldsymbol{c}_2 \end{vmatrix} \text{とおく} \right)$



- $\boldsymbol{c}_2$ と $\boldsymbol{b}_2$ の作る平行四辺形を立体の底面と見ると, $\boldsymbol{b}_2$ の終点を $\boldsymbol{c}_2$ の方向に動かしてもその平行四辺形の面積が変わらないので, 立体の体積も変わらない. よって,
  $\begin{vmatrix} \boldsymbol{a}_2 \\ \boldsymbol{b}_2 \\ \boldsymbol{c}_2 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} \boldsymbol{a}_2 \\ \boldsymbol{b}_2+\boldsymbol{c}_2 \\ \boldsymbol{c}_2 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 1 & 3 & 2 \\ 1 & 1 & 2 \end{vmatrix} \left(= \begin{vmatrix} \boldsymbol{a}_3 \\ \boldsymbol{b}_3 \\ \boldsymbol{c}_3 \end{vmatrix} \text{とおく} \right)$



以上の変形をまとめると

$$A = \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{vmatrix} \overset{1\text{ 行}+2\text{ 行}\times(1/2)}{=} \begin{vmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{vmatrix} \overset{3\text{ 行}+1\text{ 行}}{=} \begin{vmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 1 & 1 & 2 \end{vmatrix} \overset{2\text{ 行}+3\text{ 行}}{=} \begin{vmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 1 & 3 & 2 \\ 1 & 1 & 2 \end{vmatrix}$$

となる. ここで使われている性質は**ある行に他の行の定数倍を足しても行列式の値は変わらない**という性質である $\left(\text{例えば} \begin{vmatrix} \boldsymbol{a} \\ \boldsymbol{b} \\ \boldsymbol{c} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} \boldsymbol{a} \\ \boldsymbol{b}+\lambda\boldsymbol{a} \\ \boldsymbol{c} \end{vmatrix} \right)$.

逆に $\begin{vmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 1 & 3 & 2 \\ 1 & 1 & 2 \end{vmatrix}$ のような行列式の計算をするときはこの上の変形の逆とたどるように行列式を変形して, 計算しやすい数の並びを作ってから計算すると楽である.

体積が定数倍される変形

立体の一辺が 2 倍になると, 体積は 2 倍になるので,

$$\begin{vmatrix} 2\boldsymbol{a}_3 \\ \boldsymbol{b}_3 \\ \boldsymbol{c}_3 \end{vmatrix} = 2 \begin{vmatrix} \boldsymbol{a}_3 \\ \boldsymbol{b}_3 \\ \boldsymbol{c}_3 \end{vmatrix} \quad \left(\begin{vmatrix} 2 & 2 & 0 \\ 1 & 3 & 2 \\ 1 & 1 & 2 \end{vmatrix} = 2 \begin{vmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 1 & 3 & 2 \\ 1 & 1 & 2 \end{vmatrix} \right).$$