部分空間の基底と次元

定義. $\mathbb{R}^n$ の部分集合 W が

(1). $\mathbf{0} \in W$

(2). $\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b} \in W$ ならば $\boldsymbol{a} + \boldsymbol{b} \in W$

(3). $\boldsymbol{a} \in W$, $k \in \mathbb{R}$ ならば $k\boldsymbol{a} \in W$

を満たすとき，W を $\mathbb{R}^n$ の **部分空間** と呼ぶ．

1 同次連立 1 次方程式の解集合

次の同次連立 1 次方程式を考える：

$$(*) \quad \begin{cases} x + y + z = 0 \\ -x - y - z = 0 \\ 2x + 2y + 2z = 0 \end{cases}$$

1.1 部分空間であること

命題. 同次連立 1 次方程式の解集合は部分空間である．

解説. $(*)$ の解集合で説明する．$A = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ -1 & -1 & -1 \\ 2 & 2 & 2 \end{bmatrix}$ とおくと，

$$(*) \quad A \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} = \mathbf{0}$$

と書ける．いま，$\mathbf{0}$ は $(*)$ の解である．ベクトル $\boldsymbol{p}$, $\boldsymbol{q}$ が $(*)$ の解であると仮定すると，

$$A(\boldsymbol{p} + \boldsymbol{q}) = A\boldsymbol{p} + A\boldsymbol{q} = \mathbf{0} + \mathbf{0} = \mathbf{0}$$

なので，$\boldsymbol{p} + \boldsymbol{q}$ も $(*)$ の解である．また，$k \in \mathbb{R}$ に対して，

$$A(k\boldsymbol{p}) = kA\boldsymbol{p} = k\mathbf{0} = \mathbf{0}$$

より，$k\boldsymbol{p}$ も $(*)$ の解である．よって定義より，$(*)$ の解集合は $\mathbb{R}^3$ の部分空間にである．

1.2 基底の計算

次に，$(*)$ の解集合の基底を求めよう．

定義. W を $\mathbb{R}^n$ の部分空間, $\boldsymbol{a}_1, \ldots, \boldsymbol{a}_k$ を W のベクトルとする. このとき,

(1). $\boldsymbol{a}_1, \ldots, \boldsymbol{a}_k$ は一次独立である;

(2). W の任意のベクトルは $\boldsymbol{a}_1, \ldots, \boldsymbol{a}_k$ の一次結合で書ける

とき, $\boldsymbol{a}_1, \ldots \boldsymbol{a}_k$ を W の**基底**と呼ぶ.

拡大係数行列を行基本変形すると,

$$\begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ -1 & -1 & -1 \\ 2 & 2 & 2 \end{bmatrix} \to \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

となるので, 連立方程式は

$$x + y + z = 0$$

となる. ここで $y = s$, $z = t$ とおくと, $x = -s - t$ となるので, 解は

$$\begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -s-t \\ s \\ t \end{bmatrix} = s \begin{bmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} + t \begin{bmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}$$

と書ける. すると,

(1). $\begin{bmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}$ は一次独立で,

(2). $(*)$ の任意の解は $\begin{bmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}$ と $\begin{bmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}$ の一次結合で書ける

よって，$(*)$ の解集合の基底は $\begin{bmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}$ である．

解集合と基底は下図のようになる.

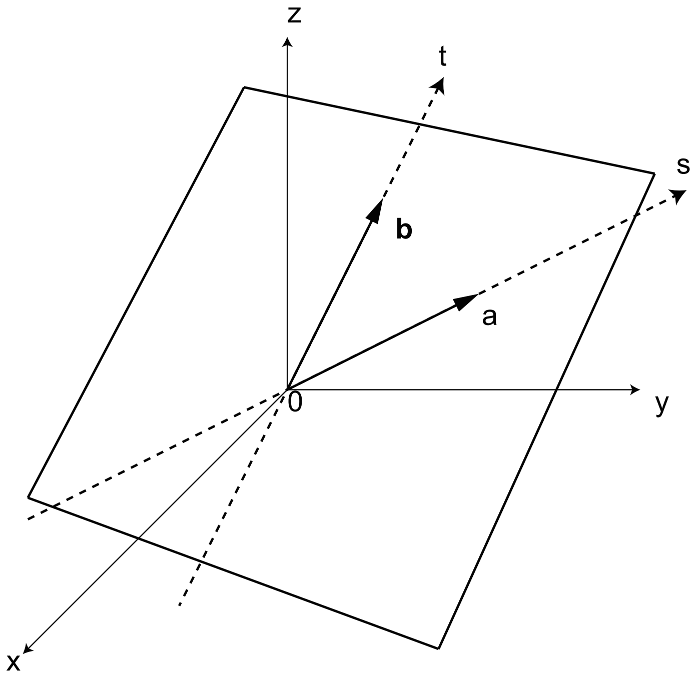

図 1. 解集合と基底 $\boldsymbol{a} = \begin{bmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}, \boldsymbol{b} = \begin{bmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}$ の図

連立方程式 $(*)$ の解を見ればわかるように, (s,t) が決まると解が一つ決まるので, 基底は解集合の座標軸 のような役割を果たしている.

1.3 生成する部分空間

次の記号を用意する;

定義. $\boldsymbol{a}_1, \ldots, \boldsymbol{a}_k$ を $\mathbb{R}^n$ のベクトルとする. $\boldsymbol{a}_1, \ldots, \boldsymbol{a}_k$ の一次結合

$$c_1\boldsymbol{a}_1 + \cdots + c_k\boldsymbol{a}_k$$

で書けるベクトルの集合を

$$\langle \boldsymbol{a}_1, \ldots, \boldsymbol{a}_k \rangle$$

と書き, $\boldsymbol{a}_1, \ldots, \boldsymbol{a}_k$ **の生成する空間**と呼ぶ. このとき, $\langle \boldsymbol{a}_1, \ldots, \boldsymbol{a}_k \rangle$ は $\mathbb{R}^n$ の部分空間になっている.

この記号を用いると,

$$\{(*) \text{ の解集合}\} = \left\langle \begin{bmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} \right\rangle$$

と書ける.

2　ベクトルの生成する空間の基底

次に，ベクトル $\boldsymbol{a}_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}, \boldsymbol{a}_2 = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}, \boldsymbol{a}_3 = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 2 \end{bmatrix}$ の生成する空間

$$W = \left\langle \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 2 \end{bmatrix} \right\rangle$$

を考える．

2.1　部分空間であること

命題. ベクトルの生成する空間は $\mathbb{R}^n$ の部分空間である．

解説. W で説明しよう．$\boldsymbol{0}$ は

$$\boldsymbol{0} = 0 \cdot \boldsymbol{a}_1 + 0 \cdot \boldsymbol{a}_2 + 0 \cdot \boldsymbol{a}_3$$

と書けるので，$\boldsymbol{0} \in W$ である．次に $\boldsymbol{p}, \boldsymbol{q} \in W$ とする．すると，

$$\begin{aligned} \boldsymbol{p} &= c_1\boldsymbol{a}_1 + c_2\boldsymbol{a}_2 + c_3\boldsymbol{a}_3, \\ \boldsymbol{q} &= d_1\boldsymbol{a}_1 + d_2\boldsymbol{a}_2 + d_3\boldsymbol{a}_3 \end{aligned}$$

と書ける．これより，

$$\boldsymbol{p} + \boldsymbol{q} = (c_1 + d_1)\boldsymbol{a}_1 + (c_2 + d_2)\boldsymbol{a}_2 + (c_3 + d_3)\boldsymbol{a}_3$$

となるので，$\boldsymbol{p} + \boldsymbol{q}$ も $\boldsymbol{a}_1, \boldsymbol{a}_2, \boldsymbol{a}_3$ の 1 次結合で書ける．よって，$\boldsymbol{p} + \boldsymbol{q} \in W$ である．最後に，$k \in \mathbb{R}$ とすると，

$$k\boldsymbol{p} = kc_1\boldsymbol{a}_1 + kc_2\boldsymbol{a}_2 + kc_3\boldsymbol{a}_3$$

より，$k\boldsymbol{p}$ も $\boldsymbol{a}_1, \boldsymbol{a}_2, \boldsymbol{a}_3$ の 1 次結合で書けるので，$k\boldsymbol{p} \in W$ である．したがって，定義より W は $\mathbb{R}^3$ の部分空間である．

2.2　基底の計算

W は $\mathbb{R}^3$ の部分空間であるが，$\boldsymbol{a}_1, \boldsymbol{a}_2, \boldsymbol{a}_3$ の 3 つのベクトルが基底になるとは限らない. この部分空間の基底を求めてみよう.

定義より W の任意のベクトルは上記の 3 つのベクトルの一次結合で書ける (定義 (2)) ので, この中から一次独立なもの (定義 (1)) を探せば良い.

一次独立の定義より,

$$c_1 \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} + c_2 \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix} + c_3 \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 2 \end{bmatrix} = \mathbf{0}$$

を満たす c_1, c_2, c_3 を求める. この式は以下の連立方程式になるので,

$$\begin{cases} c_1 \phantom{{}+c_2} + \ \ c_3 = 0 \\ \phantom{c_1 + {}} c_2 + \ \ c_3 = 0 \\ c_1 + c_2 + 2c_3 = 0 \end{cases}$$

解は,

$$\begin{bmatrix} c_1 \\ c_2 \\ c_3 \end{bmatrix} = t \begin{bmatrix} -1 \\ -1 \\ 1 \end{bmatrix}$$

となる. したがって, 初めの式に代入すると,

$$-t \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} - t \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix} + t \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 2 \end{bmatrix} = \mathbf{0}$$

より,

$$\begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}$$

が成り立つ (直接この式を求めても良い). よって, $\begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 2 \end{bmatrix}$ の一次結合で書けるベクトルは, $\begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}$ の一次結合で書ける. したがって,

$$\left\langle \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 2 \end{bmatrix} \right\rangle = \left\langle \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix} \right\rangle$$

となり, 右辺の二つのベクトルは一次独立なので, W の基底は $\begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}$ である.

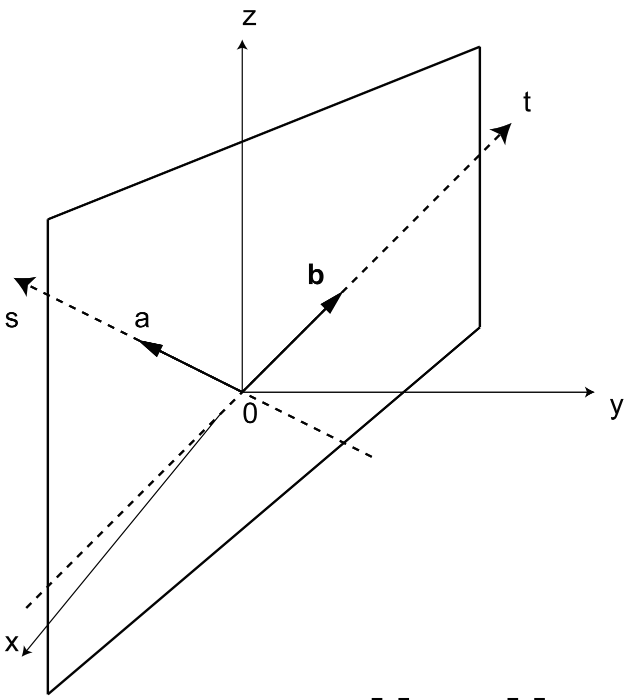

図 2. W と基底 $\boldsymbol{a} = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}$, $\boldsymbol{b} = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}$

W の任意のベクトルは $s \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} + t \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}$ と書け, (s, t) が決まると, W のベクトルは一つ決まるので, W の座標軸は実は 2 本であり, W そのものはの平面になっているということである.

3　ベクトル空間の次元

ベクトル空間 $\mathbb{R}^1$, $\mathbb{R}^2$, $\mathbb{R}^3$ には座標軸がそれぞれ, 1 つ, 2 つ, 3 つある. この座標軸の数をベクトル空間の**次元**と呼ぶ. 例えば, $\mathbb{R}^n$ の次元は n である.

一方, $\mathbb{R}^n$ の部分空間では基底が座標軸の様な役割を果たしているので, 一般に基底の数を**次元**と呼ぶ.

例 1. 第 1 節の連立方程式 $(*)$ の解集合の基底は $\begin{bmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}$, $\begin{bmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}$ なので, 次元は 2 である.

第 1 節, 2 節で見て来たように, 次元が 2 であれば部分空間は平面であった. ある部分空間の次元が 1 であれば, 基底が一つなのでその部分空間は直線になり, 次元が 3 であれば空間になる. よって, 次元はベクトル空間の形を表していると言える.