線形代数 II: 逆行列の公式とクラメールの公式

1　逆行列の公式

3×3 行列

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{bmatrix}$$

に対して,

$$\tilde{A} = \begin{bmatrix} \begin{vmatrix} a_{22} & a_{23} \\ a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} & -\begin{vmatrix} a_{12} & a_{13} \\ a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} & \begin{vmatrix} a_{12} & a_{13} \\ a_{22} & a_{23} \end{vmatrix} \\ \\ -\begin{vmatrix} a_{21} & a_{23} \\ a_{31} & a_{33} \end{vmatrix} & \begin{vmatrix} a_{11} & a_{13} \\ a_{31} & a_{33} \end{vmatrix} & -\begin{vmatrix} a_{11} & a_{13} \\ a_{21} & a_{23} \end{vmatrix} \\ \\ \begin{vmatrix} a_{21} & a_{22} \\ a_{31} & a_{32} \end{vmatrix} & -\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{31} & a_{32} \end{vmatrix} & \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \tilde{a}_{11} & \tilde{a}_{21} & \tilde{a}_{31} \\ \tilde{a}_{12} & \tilde{a}_{22} & \tilde{a}_{32} \\ \tilde{a}_{13} & \tilde{a}_{23} & \tilde{a}_{33} \end{bmatrix}$$

とおく. この $\tilde{A}$ を A の **余因子行列** と呼び, $\tilde{a}_{ij}$ を A の (i,j) **余因子** と呼ぶ.

ここで, (i,j) 余因子 $\tilde{a}_{ij}$ の符号は $(-1)^{i+j}$ に等しい. 例えば, $(2,1)$ 余因子 $\tilde{a}_{21}$ の符号は $(-1)^{2+1} = -1$ である.

定理 (逆行列の公式)**.** $|A| \neq 0$ ならば,

$$A^{-1} = \frac{1}{|A|}\tilde{A}$$

が成り立つ.

例.

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 0 & -3 \\ 0 & 1 & 0 \\ 2 & 1 & -5 \end{bmatrix}$$

の逆行列を公式を用いて求める. 余因子はそれぞれ

$$\tilde{a}_{11} = (-1)^{(1+1)} \begin{vmatrix} 1 & 0 \\ 1 & -5 \end{vmatrix}, \ \tilde{a}_{21} = (-1)^{(2+1)} \begin{vmatrix} 0 & -3 \\ 1 & -5 \end{vmatrix}, \tilde{a}_{31} = (-1)^{(3+1)} \begin{vmatrix} 0 & -3 \\ 1 & 0 \end{vmatrix},$$

$$\tilde{a}_{12} = (-1)^{(1+2)} \begin{vmatrix} 0 & 0 \\ 2 & -5 \end{vmatrix}, \tilde{a}_{22} = (-1)^{(2+2)} \begin{vmatrix} 1 & -3 \\ 2 & -5 \end{vmatrix}, \tilde{a}_{32} = (-1)^{(3+2)} \begin{vmatrix} 1 & -3 \\ 0 & 0 \end{vmatrix},$$

$$\tilde{a}_{13} = (-1)^{(1+3)} \begin{vmatrix} 0 & 1 \\ 2 & 1 \end{vmatrix}, \tilde{a}_{23} = (-1)^{(2+3)} \begin{vmatrix} 1 & 0 \\ 2 & 1 \end{vmatrix}, \tilde{a}_{33} = (-1)^{(3+3)} \begin{vmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{vmatrix}$$

であり, $|A| = 1$ なので,

$$A^{-1} = \begin{bmatrix} -5 & -3 & 3 \\ 0 & 1 & 0 \\ -2 & -1 & 1 \end{bmatrix}$$

となる.

（公式の解説）. まず

$$A\tilde{A} = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \tilde{a}_{11} & \tilde{a}_{21} & \tilde{a}_{31} \\ \tilde{a}_{12} & \tilde{a}_{22} & \tilde{a}_{32} \\ \tilde{a}_{13} & \tilde{a}_{23} & \tilde{a}_{33} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} |A| & 0 & 0 \\ 0 & |A| & 0 \\ 0 & 0 & |A| \end{bmatrix}$$

を示す.

$\tilde{A}A$ の第 1 列を求めると,

$$\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \tilde{a}_{11} \\ \tilde{a}_{12} \\ \tilde{a}_{13} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a_{11}\tilde{a}_{11} + a_{12}\tilde{a}_{12} + a_{13}\tilde{a}_{13} \\ a_{21}\tilde{a}_{11} + a_{22}\tilde{a}_{12} + a_{23}\tilde{a}_{13} \\ a_{31}\tilde{a}_{11} + a_{32}\tilde{a}_{12} + a_{33}\tilde{a}_{13} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} |A| \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

となる.

残りの列も同様に計算すると,

$$A\tilde{A} = \frac{1}{|A|} \begin{bmatrix} |A| & 0 & 0 \\ 0 & |A| & 0 \\ 0 & 0 & |A| \end{bmatrix}$$

が成り立つ. よって,

$$\frac{1}{|A|}A\tilde{A} = A\left(\frac{1}{|A|}\tilde{A}\right) = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

である. また同様に

$$\left(\frac{1}{|A|}\tilde{A}\right)A = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

も示せるので, $\frac{1}{|A|}\tilde{A} = A^{-1}$ である. □

2　クラメールの公式

定理 (クラメールの公式)**.** 2 元連立 1 次方程式

$$\begin{cases} a_{11}x + a_{12}y = b_1 \\ a_{21}x + a_{22}y = b_2 \end{cases}$$

において, $\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} \neq 0$ ならば, 解は

$$x = \frac{\begin{vmatrix} b_1 & a_{12} \\ b_2 & a_{22} \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix}}, \quad y = \frac{\begin{vmatrix} a_{11} & b_1 \\ a_{21} & b_2 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix}}$$

と書ける.

3 元連立 1 次方程式

$$\begin{cases} a_{11}x + a_{12}y + a_{13}z = b_1 \\ a_{21}x + a_{22}y + a_{23}z = b_2 \\ a_{31}x + a_{32}y + a_{33}z = b_3 \end{cases}$$

において, $\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} \neq 0$ ならば, 解は

$$x = \frac{\begin{vmatrix} b_1 & a_{12} & a_{13} \\ b_2 & a_{22} & a_{23} \\ b_3 & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}}, \quad y = \frac{\begin{vmatrix} a_{11} & b_1 & a_{13} \\ a_{21} & b_2 & a_{23} \\ a_{31} & b_3 & a_{33} \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}}, \quad z = \frac{\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & b_1 \\ a_{21} & a_{22} & b_2 \\ a_{31} & a_{32} & b_3 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}}$$

と書ける.

例.

$$\begin{cases} 3x + 2y + 6z = 1 \\ \ \ x + \ \ y + 2z = 0 \\ 2x + 2y + \qquad = 1 \end{cases}$$

の解をクラメール公式で求める. 係数行列の行列式は

$$|A| = \begin{vmatrix} 3 & 2 & 6 \\ 1 & 1 & 2 \\ 2 & 2 & 0 \end{vmatrix} = -4 \neq 0$$

なので, 公式より

$$x = \frac{\begin{vmatrix} 1 & 2 & 6 \\ 0 & 1 & 2 \\ 1 & 2 & 0 \end{vmatrix}}{|A|} = \frac{3}{2}, \quad y = \frac{\begin{vmatrix} 3 & 1 & 6 \\ 1 & 0 & 2 \\ 2 & 1 & 0 \end{vmatrix}}{|A|} = -1, \quad z = \frac{\begin{vmatrix} 3 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \\ 2 & 2 & 1 \end{vmatrix}}{|A|} = -\frac{1}{4}$$

である.

(公式の解説). まず逆行列の公式を思い出す. 連立方程式の係数を使って, 3×3 行列

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{bmatrix}$$

とおくと, 連立方程式は

$$A \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \\ b_3 \end{bmatrix}$$

と書ける. ここで $|A| \neq 0$ なので, 逆行列の公式より,

$$\begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} = A^{-1} \begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \\ b_3 \end{bmatrix} = \frac{1}{|A|} \tilde{A} \begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \\ b_3 \end{bmatrix}$$

が成り立つ. ここで,

$$\tilde{A} = \begin{bmatrix} \begin{vmatrix} a_{22} & a_{23} \\ a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} & -\begin{vmatrix} a_{12} & a_{13} \\ a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} & \begin{vmatrix} a_{12} & a_{13} \\ a_{22} & a_{23} \end{vmatrix} \\ -\begin{vmatrix} a_{21} & a_{23} \\ a_{31} & a_{33} \end{vmatrix} & \begin{vmatrix} a_{11} & a_{13} \\ a_{31} & a_{33} \end{vmatrix} & -\begin{vmatrix} a_{11} & a_{13} \\ a_{21} & a_{23} \end{vmatrix} \\ \begin{vmatrix} a_{21} & a_{22} \\ a_{31} & a_{32} \end{vmatrix} & -\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{31} & a_{32} \end{vmatrix} & \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} \end{bmatrix}$$

である. いま,

$$
\tilde{A}\begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \\ b_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} b_1\begin{vmatrix} a_{22} & a_{23} \\ a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} - b_2\begin{vmatrix} a_{12} & a_{13} \\ a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} + b_3\begin{vmatrix} a_{12} & a_{13} \\ a_{22} & a_{23} \end{vmatrix} \\ \\ -b_1\begin{vmatrix} a_{21} & a_{23} \\ a_{31} & a_{33} \end{vmatrix} + b_2\begin{vmatrix} a_{11} & a_{13} \\ a_{31} & a_{33} \end{vmatrix} - b_3\begin{vmatrix} a_{11} & a_{13} \\ a_{21} & a_{23} \end{vmatrix} \\ \\ b_1\begin{vmatrix} a_{21} & a_{22} \\ a_{31} & a_{32} \end{vmatrix} - b_2\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{31} & a_{32} \end{vmatrix} + b_3\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} \end{bmatrix}
$$

であり, 1 行目は

$$
\begin{aligned}
& b_1\begin{vmatrix} a_{22} & a_{23} \\ a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} - b_2\begin{vmatrix} a_{12} & a_{13} \\ a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} + b_3\begin{vmatrix} a_{12} & a_{13} \\ a_{22} & a_{23} \end{vmatrix} \\
&\qquad = \begin{vmatrix} b_1 & a_{12} & a_{13} \\ 0 & a_{22} & a_{23} \\ 0 & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} 0 & a_{12} & a_{13} \\ b_2 & a_{22} & a_{23} \\ 0 & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} 0 & a_{12} & a_{13} \\ 0 & a_{22} & a_{23} \\ b_3 & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} b_1 & a_{12} & a_{13} \\ b_2 & a_{22} & a_{23} \\ b_3 & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}
\end{aligned}
$$

となる (余因子展開を用いる) ので,

$$
x = \frac{1}{|A|}\begin{vmatrix} b_1 & a_{12} & a_{13} \\ b_2 & a_{22} & a_{23} \\ b_3 & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}
$$

が成り立つ. y については 2 行目を計算すると,

$$
\begin{aligned}
& -b_1\begin{vmatrix} a_{21} & a_{23} \\ a_{31} & a_{33} \end{vmatrix} + b_2\begin{vmatrix} a_{11} & a_{13} \\ a_{31} & a_{33} \end{vmatrix} - b_3\begin{vmatrix} a_{11} & a_{13} \\ a_{21} & a_{23} \end{vmatrix} \\
&\qquad = \begin{vmatrix} a_{11} & b_1 & a_{13} \\ a_{21} & 0 & a_{23} \\ a_{31} & 0 & a_{33} \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} a_{11} & 0 & a_{13} \\ a_{21} & b_2 & a_{23} \\ a_{31} & 0 & a_{33} \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} a_{11} & 0 & a_{13} \\ a_{21} & 0 & a_{23} \\ a_{31} & b_3 & a_{33} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a_{11} & b_1 & a_{13} \\ a_{21} & b_2 & a_{23} \\ a_{31} & b_3 & a_{33} \end{vmatrix}
\end{aligned}
$$

より,

$$
y = \frac{1}{|A|}\begin{vmatrix} a_{11} & b_1 & a_{13} \\ a_{21} & b_2 & a_{23} \\ a_{31} & b_3 & a_{33} \end{vmatrix}
$$

が成り立つ. z についてもと同様である. $\square$