線形代数 I: 逆行列

1　逆行列

行列 A にかけると単位行列 E になるような行列を A の逆行列といい A^{-1} と書く.

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 2 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{bmatrix}$$

とすると,

$$\begin{bmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 2 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -1 & 0 & 2 \\ 1 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & -2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} = E \text{ (単位行列)}$$

より,

$$A^{-1} = \begin{bmatrix} -1 & 0 & 2 \\ 1 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & -2 \end{bmatrix}$$

である.

2　求め方

2.1　導入

$$X = \begin{bmatrix} x_1 & x_2 & x_3 \\ y_1 & y_2 & y_3 \\ z_1 & z_2 & z_3 \end{bmatrix}$$

とする.

逆行列を求めるには

$$AX = E$$

を満たす X を求めれば良い.

例として,

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 0 & -3 \\ 0 & 1 & 0 \\ 2 & 1 & -5 \end{bmatrix}$$

とする．すると

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & -3 \\ 0 & 1 & 0 \\ 2 & 1 & -5 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 & x_2 & x_3 \\ y_1 & y_2 & y_3 \\ z_1 & z_2 & z_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

という式になる．左辺を計算すると，

$$\begin{bmatrix} x_1 - 3z_1 & x_2 - 3z_2 & x_3 - 3z_3 \\ y_1 & y_2 & y_3 \\ 2x_1 + y_1 - 5z_1 & 2x_2 + y_2 - 5z_2 & 2x_3 + y_3 - 5z_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

となる．この式の各列を比較すると，

$$\left\{ \begin{array}{rcrcrcl} x_1 & - & & - & 3z_1 & = & 1 \\ & & y_1 & & & = & 0 \\ 2x_1 & + & y_1 & - & 5z_1 & = & 0 \end{array} \right. , \quad \left\{ \begin{array}{rcrcrcl} x_2 & - & & - & 3z_2 & = & 0 \\ & & y_2 & & & = & 1 \\ 2x_2 & + & y_2 & - & 5z_2 & = & 0 \end{array} \right. , \quad \left\{ \begin{array}{rcrcrcl} x_3 & - & & - & 3z_3 & = & 0 \\ & & y_3 & & & = & 0 \\ 2x_3 & + & y_3 & - & 5z_3 & = & 1 \end{array} \right.$$

という 3 つの連立 1 次方程式を得る．

これらの方程式の拡大係数行列はそれぞれ，

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & -3 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 2 & 1 & -5 & 0 \end{bmatrix}, \quad \begin{bmatrix} 1 & 0 & -3 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ 2 & 1 & -5 & 0 \end{bmatrix}, \quad \begin{bmatrix} 1 & 0 & -3 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 2 & 1 & -5 & 1 \end{bmatrix}$$

である．

2.2 面倒な求め方

左の方程式の拡大係数行列

まず左の行列に対して行基本変形をすると，

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & -3 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 2 & 1 & -5 & 0 \end{bmatrix} \xrightarrow{3\text{ 行} + 1\text{ 行} \times(-2)} \begin{bmatrix} 1 & 0 & -3 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & -2 \end{bmatrix} \xrightarrow{3\text{ 行} - 2\text{ 行}}$$

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & -3 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -2 \end{bmatrix} \xrightarrow{1\text{ 行} + 3\text{ 行} \times 3} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & -5 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -2 \end{bmatrix}$$

となるので，

$$\begin{cases} x_1 = -5 \\ y_1 = 0 \\ z_1 = -2 \end{cases}$$

を得る. 従って, 逆行列 X は

$$X = \begin{bmatrix} -5 & x_2 & x_3 \\ 0 & y_2 & y_3 \\ -2 & z_2 & z_3 \end{bmatrix}$$

となることが分かった.

中央の方程式の拡大係数行列

次に中央の行列に対して行基本変形をすると,

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & -3 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ 2 & 1 & -5 & 0 \end{bmatrix} \xrightarrow{3\text{ 行} + 1\text{ 行} \times(-2)} \begin{bmatrix} 1 & 0 & -3 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \end{bmatrix} \xrightarrow{3\text{ 行} - 2\text{ 行}}$$
$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & -3 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & -1 \end{bmatrix} \xrightarrow{1\text{ 行} + 3\text{ 行} \times 3} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & -3 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & -1 \end{bmatrix}$$

となるので,

$$\begin{cases} x_2 = -3 \\ y_2 = 1 \\ z_2 = -1 \end{cases}$$

を得る. 従って, 逆行列 X は

$$X = \begin{bmatrix} -5 & -3 & x_3 \\ 0 & 1 & y_3 \\ -2 & -1 & z_3 \end{bmatrix}$$

となることが分かった.

右の方程式の拡大係数行列

最後に右の行列に対して行基本変形をすると,

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & -3 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 2 & 1 & -5 & 1 \end{bmatrix} \xrightarrow{3\text{ 行} + 1\text{ 行} \times(-2)} \begin{bmatrix} 1 & 0 & -3 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 1 \end{bmatrix} \xrightarrow{3\text{ 行} - 2\text{ 行}}$$
$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & -3 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \end{bmatrix} \xrightarrow{1\text{ 行} + 3\text{ 行} \times 3} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 3 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \end{bmatrix}$$

となるので,

$$\begin{cases} x_3 = 3 \\ y_3 = 0 \\ z_3 = 1 \end{cases}$$

を得る. 従って, 逆行列 X は

$$X = \begin{bmatrix} -5 & -3 & 3 \\ 0 & 1 & 0 \\ -2 & -1 & 1 \end{bmatrix}$$

となることが分かった.

考察

　このようにすれば逆行列を求めることは可能だが計算量が多すぎる. そこで逆行列 X の第 1, 2, 3 列を求める際に行った行基本変形を振り返ると,

(1). 係数行列は一緒なので, 全く同じ順番で同じ行基本変形をしている.

(2). それぞれ右辺を表す列ベクトルだけ

$$\begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}, \quad \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}, \quad \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}$$

と変わる.

したがって, これら 3 つの連立方程式は, 次のような行列

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & -3 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 2 & 1 & -5 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

に対して, 左から 3 列を単位行列にするような行基本変形 (各列を求めたときと同じ行基本変形) を行えば, 以下のように 3 つの解を同時に求めることができる;

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & -3 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 2 & 1 & -5 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \xrightarrow{3\,行 + 1\,行 \times(-2)} \begin{bmatrix} 1 & 0 & -3 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & -2 & 0 & 1 \end{bmatrix} \xrightarrow{3\,行 - 2\,行}$$

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & -3 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -2 & -1 & 1 \end{bmatrix} \xrightarrow{1\,行 + 3\,行 \times 3} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & -5 & -3 & 3 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -2 & -1 & 1 \end{bmatrix}$$

得られた行列の右側 3 列が A の逆行列 X である.

2.3 簡単な求め方

上記をまとめると, 行列 A の逆行列は以下の手順で求められる;

(1). 行列 A と単位行列 E を並べた行列 $\begin{bmatrix} A & E \end{bmatrix}$ を作る.

(2). 行列 $\begin{bmatrix} A & E \end{bmatrix}$ に対して, 中にある A を単位行列 E にするように行基本変形をする;

$$\begin{bmatrix} A & E \end{bmatrix} \to \begin{bmatrix} E & X \end{bmatrix}$$

(3). 得られた行列の中にある X が A の逆行列 A^{-1} になる.

例題

$\begin{bmatrix} 4 & 2 & 1 \\ 2 & 1 & 0 \\ -3 & -1 & -3 \end{bmatrix}$ の逆行列を計算せよ.

(解答例) 以下の行列に対して, 左 3 列が単位行列になるように行基本変形を行う.

$$\begin{bmatrix} 4 & 2 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 2 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ -3 & -1 & -3 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \xrightarrow{1\text{ 行} - 2\text{ 行} \times 2} \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 & 1 & -2 & 0 \\ 2 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ -3 & -1 & -3 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \xrightarrow{3\text{ 行} + 2\text{ 行}}$$

$$\begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 & 1 & -2 & 0 \\ 2 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & -3 & 0 & 1 & 1 \end{bmatrix} \xrightarrow{3\text{ 行} + 1\text{ 行} \times 3} \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 & 1 & -2 & 0 \\ 2 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 0 & 3 & -5 & 1 \end{bmatrix}$$

$$\xrightarrow{2\text{ 行} + 3\text{ 行} \times 2} \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 & 1 & -2 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 6 & -9 & 2 \\ -1 & 0 & 0 & 3 & -5 & 1 \end{bmatrix} \xrightarrow[1\text{ 行と } 3\text{ 行を入れ替える}]{3\text{ 行} \times(-1)} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & -3 & 5 & -1 \\ 0 & 1 & 0 & 6 & -9 & 2 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & -2 & 0 \end{bmatrix}$$

$$\text{答え} \begin{bmatrix} 4 & 2 & 1 \\ 2 & 1 & 0 \\ -3 & -1 & -3 \end{bmatrix}^{-1} = \begin{bmatrix} -3 & 5 & -1 \\ 6 & -9 & 2 \\ 1 & -2 & 0 \end{bmatrix}$$