線形代数 II: 対称行列

1　対称行列と固有ベクトル

定義. A を実正方行列とする. ${}^tA = A$ のとき, A を対称行列と呼ぶ.

解説. 対称行列は行列の成分が対角成分に対して, 対称である行列である. 例えば以下は対称行列である;

$$\begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 2 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 1 & 2 & -1 \\ 2 & -2 & 2 \\ -1 & 2 & 1 \end{bmatrix}.$$

定理 1. A を対称行列, λ_1, λ_2 を A の異なる固有値とする．このとき λ_1 の固有ベクトルと λ_2 の固有ベクトルは直交する.

例.

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & -1 \\ 2 & -2 & 2 \\ -1 & 2 & 1 \end{bmatrix}$$

は対称行列であり, 固有値と固有ベクトルの組はそれぞれ

$$\lambda_1 = 2, \begin{bmatrix} 2 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}, \quad \lambda_2 = -4, \begin{bmatrix} 1 \\ -2 \\ 1 \end{bmatrix}$$

となる. このとき, $\lambda_1 = 2$ と $\lambda_2 = -4$ の固有ベクトルは

$$\left\langle \begin{bmatrix} 2 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 1 \\ -2 \\ 1 \end{bmatrix} \right\rangle = 0,$$
$$\left\langle \begin{bmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 1 \\ -2 \\ 1 \end{bmatrix} \right\rangle = 0$$

となるので, 直交している. 一方, $\lambda_2 = 2$ の 2 つの固有ベクトルは

$$\left\langle \begin{bmatrix} 2 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} \right\rangle = -2$$

となるので直交していない.

注意 (転置に関する注意事項). 内積は, $\boldsymbol{x} = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix}$, $\boldsymbol{y} = \begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \\ \vdots \\ y_n \end{bmatrix}$ にたいして,

$$\langle \boldsymbol{x}, \boldsymbol{y} \rangle = x_1y_1 + x_2y_2 + \cdots + x_ny_n = \begin{bmatrix} x_1, x_2, \ldots, x_n \end{bmatrix} \begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \\ \vdots \\ y_n \end{bmatrix} = {}^t\boldsymbol{x}\boldsymbol{y}$$

と書ける. また, ${}^t(A\boldsymbol{x}) = {}^t\boldsymbol{x}{}^tA$ となる.

定理 1 の証明. λ_1 の固有ベクトルを $\boldsymbol{x}$, λ_2 の固有ベクトルを $\boldsymbol{y}$ とする. このとき, $A\boldsymbol{x} = \lambda_1\boldsymbol{x}$, $A\boldsymbol{y} = \lambda_2\boldsymbol{y}$ なので,

$$\begin{aligned} \lambda_1\langle \boldsymbol{x}, \boldsymbol{y} \rangle &= \lambda{}^t\boldsymbol{x}\boldsymbol{y} = {}^t(\lambda\boldsymbol{x})\boldsymbol{y} = {}^t(A\boldsymbol{x})\boldsymbol{y} = {}^t\boldsymbol{x}{}^tA\boldsymbol{y} \\ (A \text{ は対称行列なので}) &= {}^t\boldsymbol{x}A\boldsymbol{y} = {}^t\boldsymbol{x}(A\boldsymbol{y}) = {}^t\boldsymbol{x}\,(\lambda_2\boldsymbol{y}) = \lambda_2{}^t\boldsymbol{x}\boldsymbol{y} = \lambda_2\langle \boldsymbol{x}, \boldsymbol{y} \rangle \end{aligned}$$

となる. よって,

$$(\lambda_1 - \lambda_2)\langle \boldsymbol{x}, \boldsymbol{y} \rangle = 0$$

を得る. したがって $\lambda_1 \neq \lambda_2$ より, $\langle \boldsymbol{x}, \boldsymbol{y} \rangle = 0$ が成り立つ. □

2 対称行列の直交対角化

証明は省略するが, 次の定理が成り立つ. まず用語を用意する.

定義. 正規直交基底を列ベクトルとして並べた行列を直交行列という.

補足. A が直交行列であれば, ${}^tAA = E$ となる. これより $A^{-1} = {}^tA$ が成り立つ.

定理 2. すべての対称行列は直交行列で対角化できる.

例.

$$A = \begin{bmatrix} 2 & 2 & -1 \\ 2 & -1 & 2 \\ -1 & 2 & 2 \end{bmatrix}$$

A は対称行列である. まず, 固有値と固有ベクトルを求めると,

$$\lambda = 3, \boldsymbol{x}_1 = \begin{bmatrix} 2 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}, \boldsymbol{x}_2 = \begin{bmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}, \quad \lambda = -3, \boldsymbol{x}_3 = \begin{bmatrix} 1 \\ -2 \\ 1 \end{bmatrix}$$

となる．これを正規直交化する．ここで, 定理 1 より, 異なる固有値の固有ベクトルは直交している (実際に確認してみよ)．よって, $\lambda = 3$ の 固有ベクトル $\boldsymbol{x}_1, \boldsymbol{x}_2$ だけ正規直交化し, $\lambda = -3$ の固有ベクトル $\boldsymbol{x}_3$ は正規化のみ行う (ノルムを 1 にする)．シュミットの正規直交化により,

$$\boldsymbol{y}_1 = \frac{\boldsymbol{x}_1}{\|\boldsymbol{x}_1\|} = \frac{1}{\sqrt{5}}\begin{bmatrix}2\\1\\0\end{bmatrix},$$

$$\tilde{\boldsymbol{y}}_2 = \boldsymbol{x}_2 - \langle \boldsymbol{y}_1, \boldsymbol{x}_2\rangle \boldsymbol{y}_1 = \frac{1}{5}\begin{bmatrix}-1\\2\\5\end{bmatrix},$$

$$\boldsymbol{y}_2 = \frac{\tilde{\boldsymbol{y}}_2}{\|\tilde{\boldsymbol{y}}_2\|} = \frac{1}{\sqrt{30}}\begin{bmatrix}-1\\2\\5\end{bmatrix}$$

を得る．このとき, $\boldsymbol{y}_1, \boldsymbol{y}_2$ は $\lambda = 3$ の固有ベクトルである．

次に $\boldsymbol{x}_3$ のノルムを 1 にすると,

$$\frac{\boldsymbol{x}_3}{\|\boldsymbol{x}_3\|} = \frac{1}{\sqrt{6}}\begin{bmatrix}1\\-2\\1\end{bmatrix}$$

となり, 正規直交基底

$$\left\{\frac{1}{\sqrt{5}}\begin{bmatrix}2\\1\\0\end{bmatrix}, \frac{1}{\sqrt{30}}\begin{bmatrix}-1\\2\\5\end{bmatrix}, \frac{1}{\sqrt{6}}\begin{bmatrix}1\\-2\\1\end{bmatrix}\right\}$$

が得られる．ここで, すべて A の固有ベクトルになっていることに注意すると, それらを並べて,

$$A\begin{bmatrix}2/\sqrt{5} & -1/\sqrt{30} & 1/\sqrt{6}\\ 1/\sqrt{5} & 2/\sqrt{30} & -2/\sqrt{6}\\ 0 & 5/\sqrt{30} & 1/\sqrt{6}\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}2/\sqrt{5} & -1/\sqrt{30} & 1/\sqrt{6}\\ 1/\sqrt{5} & 2/\sqrt{30} & -2/\sqrt{6}\\ 0 & 5/\sqrt{30} & 1/\sqrt{6}\end{bmatrix}\begin{bmatrix}3 & 0 & 0\\ 0 & 3 & 0\\ 0 & 0 & -3\end{bmatrix}$$

が成り立つ．よって, $P = \begin{bmatrix}2/\sqrt{5} & -1/\sqrt{30} & 1/\sqrt{6}\\ 1/\sqrt{5} & 2/\sqrt{30} & -2/\sqrt{6}\\ 0 & 5/\sqrt{30} & 1/\sqrt{6}\end{bmatrix}$ とおくと,

$$P^{-1}AP = \begin{bmatrix}3 & 0 & 0\\ 0 & 3 & 0\\ 0 & 0 & -3\end{bmatrix}$$

と直交行列で対角化できる．なお，上記補足より，

$$P^{-1} = {}^tP = \begin{bmatrix}2/\sqrt{5} & 1/\sqrt{5} & 0\\ -1/\sqrt{30} & 2/\sqrt{30} & 5/\sqrt{30}\\ 1/\sqrt{6} & -2/\sqrt{6} & 1/\sqrt{6}\end{bmatrix}$$

である．