平面の式

2 変数 1 次関数のグラフ

まず，2 変数の 1 次関数

$$z = \alpha x + \beta y$$

（α，β は実数定数）について，グラフと α，β の関係を調べよう．

$z = \alpha x + \beta y$ は x 軸上で $z = \alpha x$，y 軸上で $z = \beta y$ という値をとることから，以下のような二つの直線を含む平面を表していることがわかる．

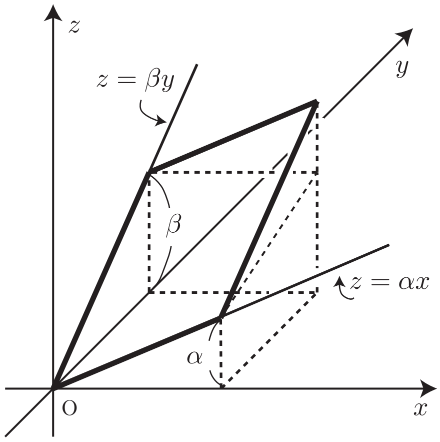


図 1: $z = \alpha x + \beta y$ のグラフ

平面の式の一般形

平面の式は一般に

$$(*) \quad \alpha x + \beta y + \gamma z + \delta = 0$$

と書ける．ここで

$$\begin{bmatrix} \alpha \\ \beta \\ \gamma \end{bmatrix}$$

は $(*)$ の表す平面に垂直なベクトルで，**法線ベクトル** と呼ばれる．実際に，(x_1, y_1, z_1) と (x_2, y_2, z_2) を $(*)$ の表す平面上の点とする．すると

$$\begin{cases} \alpha x_1 + \beta y_1 + \gamma z_1 + \delta = 0 \\ \alpha x_2 + \beta y_2 + \gamma z_2 + \delta = 0 \end{cases}$$

となり，式同士を引くと

$$0 = \alpha(x_1 - x_2) + \beta(y_1 - y_2) + \gamma(z_1 - z_2) = \begin{bmatrix} \alpha \\ \beta \\ \gamma \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} x_1 - x_2 \\ y_1 - y_2 \\ z_1 - z_2 \end{bmatrix}$$

を得る．いま (x_1, y_1, z_1) と (x_2, y_2, z_2) は平面上の任意の点なので，$\begin{bmatrix} \alpha \\ \beta \\ \gamma \end{bmatrix}$ は平面に垂直なベクトルである．

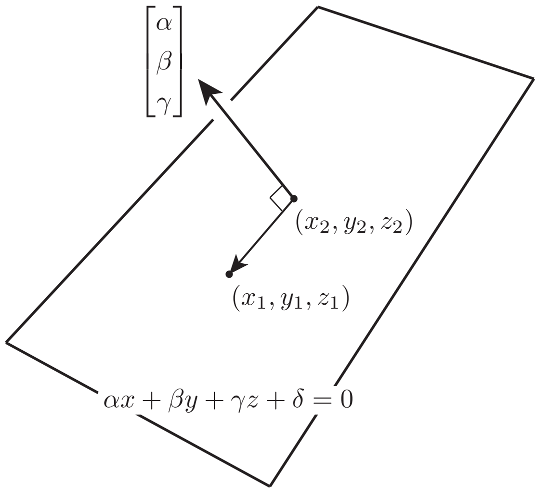


図 2: 平面と法線ベクトル

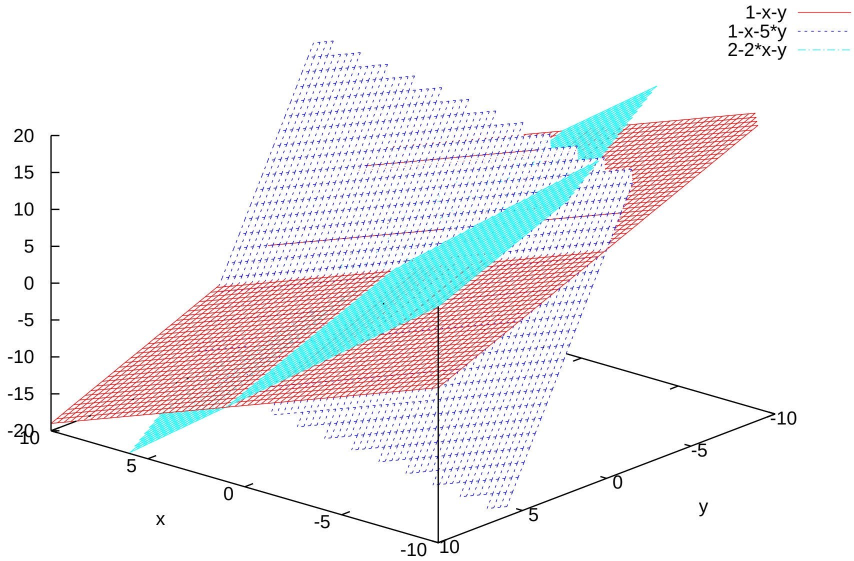
特に，ベクトル $\begin{bmatrix} \alpha \\ \beta \\ \gamma \end{bmatrix}$ に垂直で，(a, b, c) を通る平面は,

$$\alpha(x - a) + \beta(y - b) + \gamma(z - c) = 0$$

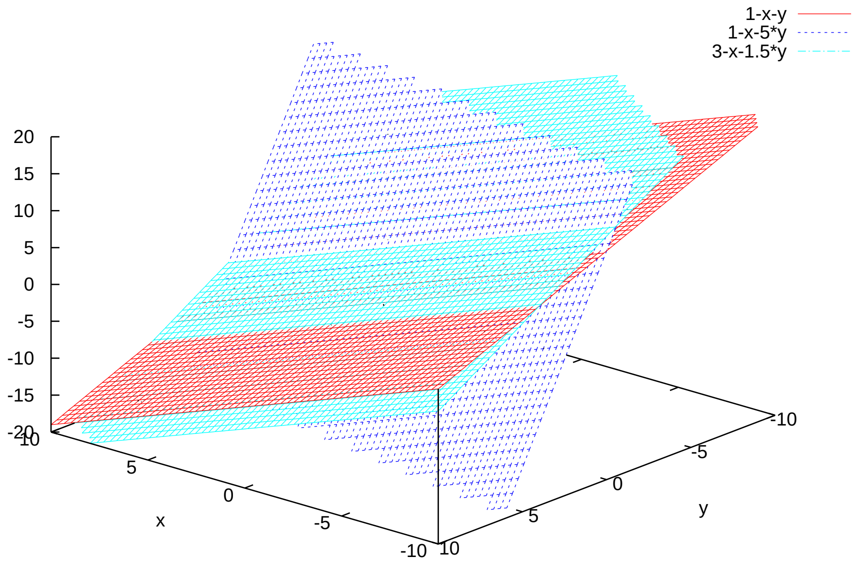
と書ける．

空間内の平面の例 (3 元連立 1 次方程式の解集合)

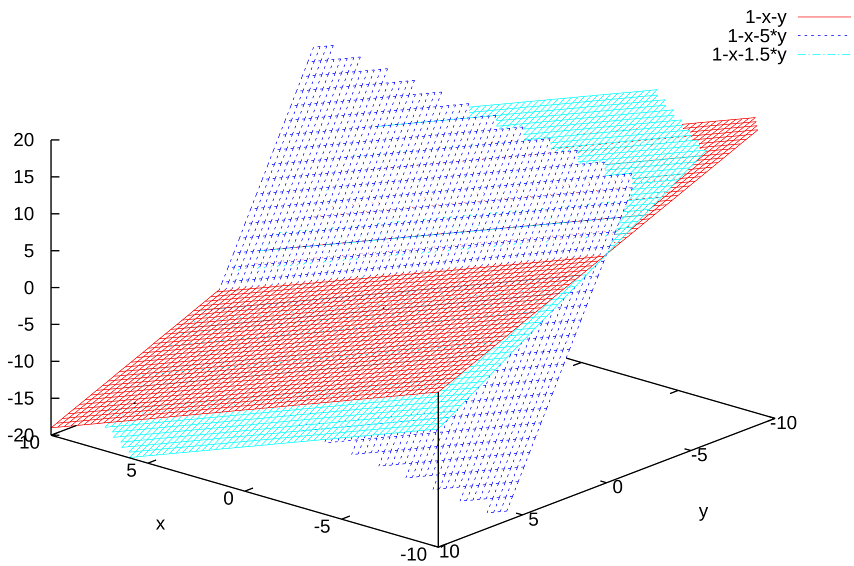
- 3 枚の平面のうちどの 2 枚も互いに平行でない場合
  - 3 本の共通直線が 1 点で交わっていて, 共通部分は 1 点になる.



  - 3 本の共通直線が平行であり, 共通部分がない.



– 3 本の共通直線が一致していて, 共通部分は直線になる.



- 3 枚の平面のうち, 2 平面が平行で, 共通部分がない.