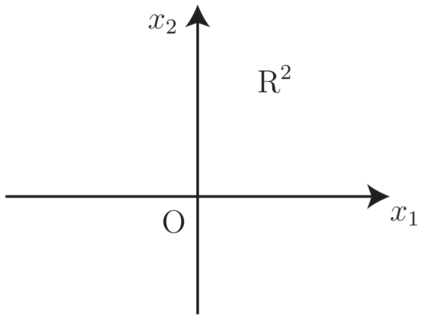
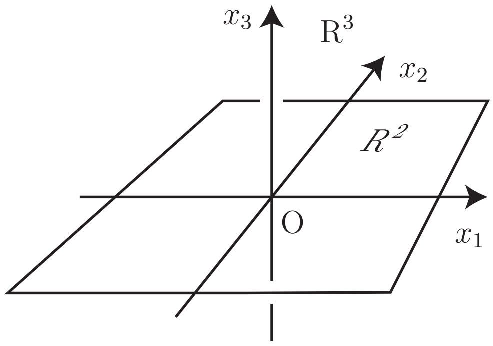
部分空間の基底と次元

下図のように，数ベクトル空間 $\mathbb{R}^3$ の中に，別の数ベクトル空間 $\mathbb{R}^2$ があることがわかるだろう．





具体的には，$\mathbb{R}^3$ のベクトルの内，$\begin{pmatrix} x \\ y \\ 0 \end{pmatrix}$ と書けるベクトルだけを集めれば，$\mathbb{R}^2$ と同じ性質をもつベクトル空間が得られる．

一般に，$\mathbb{R}^n$ の部分集合が以下の性質を満たせば，それらはベクトル空間になっている．

定義． $\mathbb{R}^n$ の部分集合 W が

(1). $\mathbf{0} \in W$

(2). $\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b} \in W$ ならば $\boldsymbol{a} + \boldsymbol{b} \in W$

(3). $\boldsymbol{a} \in W$，$k \in \mathbb{R}$ ならば $k\boldsymbol{a} \in W$

を満たすとき，W を $\mathbb{R}^n$ の **部分空間** と呼ぶ．

補足． 部分空間は,「部分ベクトル空間」（ベクトル空間に含まれるベクトル空間）の略だと考えると覚えやすい．

1　同次連立 1 次方程式の解集合

次の同次連立 1 次方程式を考える：

$$(*) \quad \begin{cases} x + y + z = 0 \\ -x - y - z = 0 \\ 2x + 2y + 2z = 0 \end{cases}$$

1.1　部分空間であること

命題. 同次連立 1 次方程式の解集合は，部分空間である.

解説. $(*)$ の解集合で説明する．$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ -1 & -1 & -1 \\ 2 & 2 & 2 \end{pmatrix}$ とおくと，

$$(*) \quad A\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \mathbf{0}$$

と書ける．まず，$\mathbf{0}$ は $(*)$ の解であるので，定義 (1) を満たす．つぎに，ベクトル $\boldsymbol{p}$, $\boldsymbol{q}$ が $(*)$ の解であると仮定すると，

$$A(\boldsymbol{p}+\boldsymbol{q}) = A\boldsymbol{p} + A\boldsymbol{q} = \mathbf{0}+\mathbf{0} = \mathbf{0}$$

なので，$\boldsymbol{p}+\boldsymbol{q}$ も $(*)$ の解である．よって，定義 (2) を満たす．最後に，$k \in \mathbb{R}$ に対して，

$$A(k\boldsymbol{p}) = kA\boldsymbol{p} = k\mathbf{0} = \mathbf{0}$$

より，$k\boldsymbol{p}$ も $(*)$ の解である．よって定義 (3) も満たし，したがって $(*)$ の解集合は $\mathbb{R}^3$ の部分空間である.

1.2　基底の計算

$\mathbb{R}^3$ の座標軸 x, y, z は，それぞれベクトル $\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$ に対応している.

実際,

$$\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = x \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + y \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + z \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

と書け，線形結合の係数がそれぞれ x, y, z 座標になっている．一般の部分空間の座標軸は基底と呼ばれ、次のように定義される.

定義. W を $\mathbb{R}^n$ の部分空間, $\boldsymbol{a}_1, \ldots, \boldsymbol{a}_k$ を W のベクトルとする. このとき,

(1). $\boldsymbol{a}_1, \ldots, \boldsymbol{a}_k$ は線形独立である;

(2). W の任意のベクトルは $\boldsymbol{a}_1, \ldots, \boldsymbol{a}_k$ の線形結合で書ける

とき, $\boldsymbol{a}_1, \ldots \boldsymbol{a}_k$ を W の **基底** と呼ぶ.

$(*)$ の解集合の基底を求めよう．拡大係数行列を行基本変形すると，

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ -1 & -1 & -1 \\ 2 & 2 & 2 \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

となるので, 連立方程式は

$$x + y + z = 0$$

となる．ここで $y = s$, $z = t$ とおくと, $x = -s - t$ となるので, 解は

$$\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -s-t \\ s \\ t \end{pmatrix} = s\begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + t\begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

と書ける．すると，

(1). $\begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$ は線形独立で,

(2). $(*)$ の任意の解は $\begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$ と $\begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$ の線形結合で書ける

よって，$(*)$ の解集合の基底は $\begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$ である．

解集合と基底は下図のようになる．

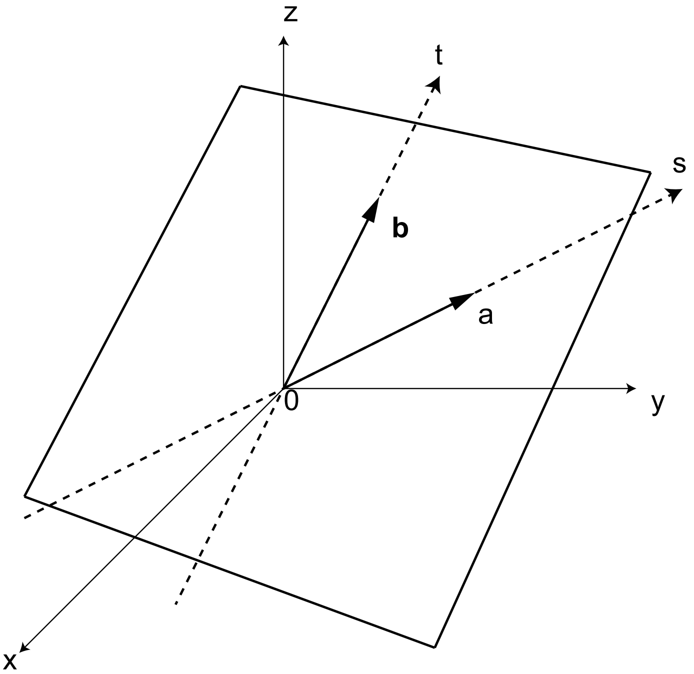


図 1. 解集合と基底 $\boldsymbol{a} = \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \boldsymbol{b} = \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$ の図

(s,t) が決まると解が一つ決まる．一方，$\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b}$ は線形独立なので，そのような (s,t) は唯一つしかない．実際，あるベクトル $\boldsymbol{v}$ が

$$\boldsymbol{v} = s\boldsymbol{a} + t\boldsymbol{b} = s'\boldsymbol{a} + t'\boldsymbol{b}$$

と二通りの表し方で書けたとする．すると，右辺を移行すれば，

$$(s - s')\boldsymbol{a} + (t - t')\boldsymbol{b} = \boldsymbol{0}$$

となる．しかし，$\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b}$ は線形独立なので，$s = s'$, $t = t'$ が成り立つ．これらのことから，基底は解集合の座標軸のような役割を果たしていると言える．

2　生成する部分空間

次の記号を用意する;

定義. $\boldsymbol{a}_1, \ldots, \boldsymbol{a}_k$ を $\mathbb{R}^n$ のベクトルとする. $\boldsymbol{a}_1, \ldots, \boldsymbol{a}_k$ の線形結合

$$c_1\boldsymbol{a}_1 + \cdots + c_k\boldsymbol{a}_k$$

で書けるベクトルの集合を

$$\langle \boldsymbol{a}_1, \ldots, \boldsymbol{a}_k \rangle$$

と書き, $\boldsymbol{a}_1, \ldots, \boldsymbol{a}_k$ **の生成する空間**と呼ぶ. このとき, $\langle \boldsymbol{a}_1, \ldots, \boldsymbol{a}_k \rangle$ は $\mathbb{R}^n$ の部分空間になっている.

この記号を用いると,

$$\{(*) \text{ の解集合}\} = \left\langle \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \right\rangle$$

と書ける.

2.1 ベクトルの生成する空間の基底

次に，ベクトル $\boldsymbol{a}_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \\ 6 \end{pmatrix}, \boldsymbol{a}_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 5 \end{pmatrix}, \boldsymbol{a}_3 = \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 1 \end{pmatrix}$ の生成する空間

$$W = \left\langle \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \\ 6 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 5 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 1 \end{pmatrix} \right\rangle$$

を考える.

2.2 部分空間であること

命題. ベクトルの生成する空間は $\mathbb{R}^n$ の部分空間である.

解説. W で説明しよう．$\mathbf{0}$ は

$$\mathbf{0} = 0 \cdot \boldsymbol{a}_1 + 0 \cdot \boldsymbol{a}_2 + 0 \cdot \boldsymbol{a}_3$$

と書けるので，$\mathbf{0} \in W$ である（部分空間の定義 (1)）．次に $\boldsymbol{p}$, $\boldsymbol{q} \in W$ とする．すると,

$$\boldsymbol{p} = c_1\boldsymbol{a}_1 + c_2\boldsymbol{a}_2 + c_3\boldsymbol{a}_3,$$
$$\boldsymbol{q} = d_1\boldsymbol{a}_1 + d_2\boldsymbol{a}_2 + d_3\boldsymbol{a}_3$$

と書ける．これより，

$$\boldsymbol{p}+\boldsymbol{q}=(c_1+d_1)\boldsymbol{a}_1+(c_2+d_2)\boldsymbol{a}_2+(c_3+d_3)\boldsymbol{a}_3$$

となるので，$\boldsymbol{p}+\boldsymbol{q}$ も $\boldsymbol{a}_1, \boldsymbol{a}_2, \boldsymbol{a}_3$ の線形結合で書ける（定義 (2)）．よって，$\boldsymbol{p}+\boldsymbol{q} \in W$ である．最後に，$k \in \mathbb{R}$ とすると，

$$k\boldsymbol{p}=kc_1\boldsymbol{a}_1+kc_2\boldsymbol{a}_2+kc_3\boldsymbol{a}_3$$

より，$k\boldsymbol{p}$ も $\boldsymbol{a}_1, \boldsymbol{a}_2, \boldsymbol{a}_3$ の線形結合で書けるので，$k\boldsymbol{p} \in W$ である（定義 (3)）．したがって，定義より W は $\mathbb{R}^3$ の部分空間である．

2.3 基底の計算

$W=\langle \boldsymbol{a}_1, \boldsymbol{a}_2, \boldsymbol{a}_3 \rangle$ は $\mathbb{R}^3$ の部分空間であるが，

$$\boldsymbol{a}_1=\begin{pmatrix}1\\3\\6\end{pmatrix}, \boldsymbol{a}_2=\begin{pmatrix}1\\2\\5\end{pmatrix}, \boldsymbol{a}_3=\begin{pmatrix}1\\-2\\1\end{pmatrix}$$

の 3 つのベクトルが基底になるとは限らない. 部分空間 W の基底を求めてみよう.

定義より W の任意のベクトルは上記の 3 つのベクトルの線形結合で書ける（定義 (2)）ので, この中から線形独立なもの（定義 (1)）を探せば良い.

線形独立の定義より,

$$c_1\begin{pmatrix}1\\3\\6\end{pmatrix}+c_2\begin{pmatrix}1\\2\\5\end{pmatrix}+c_3\begin{pmatrix}1\\-2\\1\end{pmatrix}=\boldsymbol{0}$$

を満たす c_1, c_2, c_3 を求める. この式は連立方程式になるので,

$$\begin{pmatrix}1&1&1\\3&2&-2\\6&5&1\end{pmatrix} \longrightarrow \begin{pmatrix}1&0&-4\\0&1&5\\0&0&0\end{pmatrix}$$

と係数行列を階段行列に変形すれば，解は,

$$\begin{pmatrix}c_1\\c_2\\c_3\end{pmatrix}=t\begin{pmatrix}4\\-5\\1\end{pmatrix}$$

となる.

注意

$A = \begin{pmatrix} \boldsymbol{a}_1 & \boldsymbol{a}_2 & \boldsymbol{a}_3 \end{pmatrix}$, $x = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix}$ に対して,

$$\begin{array}{ccc} \text{連立方程式} & & \text{列ベクトルの線形結合} \\ A\boldsymbol{x} = \boldsymbol{b} & \longleftrightarrow & x_1\boldsymbol{a}_1 + x_2\boldsymbol{a}_2 + x_3\boldsymbol{a}_3 = \boldsymbol{b} \end{array}$$

したがって, 初めの式に代入すると,

$$4t\begin{pmatrix} 1 \\ 3 \\ 6 \end{pmatrix} - 5t\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 5 \end{pmatrix} + t\begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 1 \end{pmatrix} = \boldsymbol{0}$$

より,

$$\begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 1 \end{pmatrix} = -4\begin{pmatrix} 1 \\ 3 \\ 6 \end{pmatrix} + 5\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 5 \end{pmatrix}$$

が成り立つ. よって, $\begin{pmatrix} 1 \\ 3 \\ 6 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 5 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 1 \end{pmatrix}$ の線形結合で書けるベクトルは, $\begin{pmatrix} 1 \\ 3 \\ 6 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 5 \end{pmatrix}$ の線形結合で書ける. したがって,

$$\left\langle \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \\ 6 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 5 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 1 \end{pmatrix} \right\rangle = \left\langle \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \\ 6 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 5 \end{pmatrix} \right\rangle$$

となり, 右辺の二つのベクトルは線形独立なので, W の基底は $\begin{pmatrix} 1 \\ 3 \\ 6 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 5 \end{pmatrix}$ である.

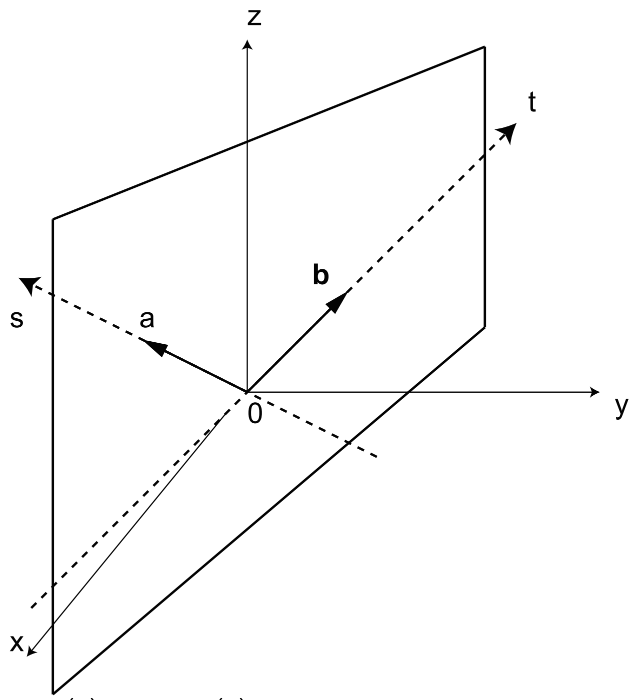


図 2. W と基底 $\boldsymbol{a} = \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \\ 6 \end{pmatrix}, \boldsymbol{b} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 5 \end{pmatrix}$. 描き易いようにベクトルの向きは適当に変えている.

W の任意のベクトルは $s \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \\ 6 \end{pmatrix} + t \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 5 \end{pmatrix}$ と書け, (s, t) が決まると, W のベクトルは一つ決まるので, W の座標軸は実は 2 本であり, W そのものはの平面になっているということである.

補足. 基底は一組ではない. 実際,

$$\begin{pmatrix} 1 \\ 3 \\ 6 \end{pmatrix} = \frac{5}{4} \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 5 \end{pmatrix} - \frac{1}{4} \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 1 \end{pmatrix}$$

と書くこともできるので,

$$W = \left\langle \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \\ 6 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 5 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 1 \end{pmatrix} \right\rangle = \left\langle \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 5 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 1 \end{pmatrix} \right\rangle$$

も成り立つ. よって, $\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 5 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 1 \end{pmatrix}$ も W の基底となる.

2.3.1 簡単な計算法

上記の議論の意味を考えながら，計算を簡単にすることを考える．いま，

$$\boldsymbol{a}_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \\ 6 \end{pmatrix}, \quad \boldsymbol{a}_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 5 \end{pmatrix}, \quad \boldsymbol{a}_3 = \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 1 \end{pmatrix}$$

に対して，ベクトルの張る空間

$$\left\langle \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \\ 6 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 5 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 1 \end{pmatrix} \right\rangle$$

の基底を求めたい．この中から線形独立なベクトルを選びたいので，$c_1\boldsymbol{a}_1 + c_2\boldsymbol{a}_2 + c_3\boldsymbol{a}_3 = \boldsymbol{0}$ を考える．

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 3 & 2 & -2 \\ 6 & 5 & 1 \end{pmatrix} \longrightarrow \begin{pmatrix} 1 & 0 & -4 \\ 0 & 1 & 5 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

と変形して得られた階段行列列を，列ベクトルを用いて $\begin{pmatrix} \boldsymbol{b}_1 & \boldsymbol{b}_2 & \boldsymbol{b}_3 \end{pmatrix}$ とおくと，

$$\boldsymbol{b}_3 = -4\boldsymbol{b}_1 + 5\boldsymbol{b}_2$$

となるので，

$$\boldsymbol{a}_3 = -4\boldsymbol{a}_1 + 5\boldsymbol{a}_2$$

も成り立つ．よって，

$$\langle \boldsymbol{a}_1, \boldsymbol{a}_2, \boldsymbol{a}_3 \rangle = \langle \boldsymbol{a}_1, \boldsymbol{a}_2 \rangle$$

である．

補足. $\boldsymbol{b}_1, \boldsymbol{b}_2, \boldsymbol{b}_3$ の関係式を移項すると，

$$\boldsymbol{0} = 4\boldsymbol{b}_1 - 5\boldsymbol{b}_2 + \boldsymbol{b}_3 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & -4 \\ 0 & 1 & 5 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 4 \\ -5 \\ 1 \end{pmatrix}$$

となり，係数は階段行列が表す連立方程式の解である．したがって，元の連立方程式の解にもなるので，

$$4\boldsymbol{a}_1 - 5\boldsymbol{a}_2 + \boldsymbol{a}_3 = \boldsymbol{0}$$

も成り立つ．この関係式を再度移項すればよい．

3　ベクトル空間の次元

ベクトル空間 $\mathbb{R}^1$, $\mathbb{R}^2$, $\mathbb{R}^3$ には座標軸がそれぞれ, 1 つ, 2 つ, 3 つある．この座標軸の数をベクトル空間の**次元**と呼ぶ．例えば, $\mathbb{R}^n$ の次元は n である．

一方, $\mathbb{R}^n$ の部分空間 W では，基底が座標軸の様な役割を果たしているので，以下のように次元を定義する．

定義. $\mathbb{R}^n$ の部分空間 W に対して，基底をなすベクトルの個数を **次元** と呼び, $\dim W$ と書く．

補足. 基底はいくつもあるが，基底をなすベクトルの個数は常に等しいということが知られている．

例 1. 第 1 節の連立方程式 $(*)$ の解集合の基底は $\begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$ なので, 次元は 2 である．

第 1 節, 2 節で見て来たように, 次元が 2 であれば部分空間は平面であった．ある部分空間の次元が 1 であれば, 基底が一つなのでその部分空間は直線になり, 次元が 3 であれば空間になる．よって, 次元はベクトル空間の形を表していると言える．